

Importance Sampling Filter による対数正規確率場の補間

武蔵工業大学 正会員 丸山 收
武蔵工業大学 正会員 星谷 勝

1. はじめに

本研究は、非ガウス性確率場の一部の観測点において測定データが得られる場合に確率場の補間を効率的に行うことを目的としている。既往の研究成果^{1),2)}により BF/MCF は任意非ガウス性確率場に適用可能な手法であることが報告されているが、モンテカルロ法に基づく手法であるために計算時間に関する問題点がある。ここでは対数正規確率場を対象にして、Importance Sampling Filter (ISF)³⁾によると補間が効率的に行えることを示している。

2. Importance Sampling Filter³⁾

確率場が時間変動を伴わない静的確率場の補間問題を対象とし、空間座標を $\mathbf{z}$ として事前確率場 $\mathbf{x}^T = [x(\mathbf{z}_1), x(\mathbf{z}_2), \dots, x(\mathbf{z}_n)]$ が任意多次元確率密度関数 $p(\mathbf{x})$ により規定されるものとし、 $\mathbf{x}$ の一部が測定されて1組の観測データセット $\mathbf{y}$ が与えられるものとする。

状態ベクトル $\mathbf{x}$ と観測量との関係を記述する観測方程式を次式で与える。

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{y}$ は $(s \times 1)$ の観測ベクトル、 $\mathbf{w}$ は確率密度関数が $r(\mathbf{w})$ として与えられる $(s \times 1)$ の観測ノイズベクトルである。 $\mathbf{H}$ は $(s \times n)$ の観測点を規定する行列であり、観測点の座標に対応する成分が 1 となる。また、観測ノイズ $\mathbf{w}$ は観測ベクトル $\mathbf{y}$ と独立であり、 $\mathbf{x}$ および $\mathbf{w}$ はガウス性である必要はない。

この条件のもとで、非観測点を含む確率場の情報更新を行うこととする。具体的には、式(2)に示す条件付確率密度関数を求めることであり、観測点では観測ノイズの除去、非観測点において補間を行うことになる。BF/MCF^{1),2)}は事前確率場のサンプル実現値を数多くシミュレートし、一部の観測値を条件として得られる尤度をもとにリサンプリングされたサンプル実現値により条件付確率密度関数を推定する手法である。一方 ISF³⁾は以下に示すように条件付確率密度関数と重要サンプリング密度関数で与えられる重み関数 $w(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ を求める手法であり、比較的少ない数のサンプル実現値で条件付確率場を得ることが出来る。式(2)は重要サンプリング密度関数 $q(\mathbf{x})$ により式(3)のように表現される。

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) p(\mathbf{x})}{\int p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (2) \quad \frac{p(\mathbf{x} | \mathbf{y})}{q(\mathbf{x})} q(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) \frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} q(\mathbf{x})}{\int p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) \frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (3)$$

次に重み関数 $w(\mathbf{x})$ を式(4)として、式(3)の $\mathbf{x}$ をサンプル実現値 $\mathbf{p}^{(i)}$ により表現することで近似的に式(5)を得る。ここでサンプル実現値 $\mathbf{p}^{(i)}, (i=1, 2, \dots, m)$ は重要サンプリング密度関数 $q(\mathbf{x})$ からシミュレートされる。

$$w(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} \quad (4) \quad w(\mathbf{p}^{(i)} | \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{p}^{(i)}) w(\mathbf{p}^{(i)})}{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m p(\mathbf{y} | \mathbf{p}^{(j)}) w(\mathbf{p}^{(j)})} \quad (5)$$

式(5)における $w(\mathbf{p}^{(i)} | \mathbf{y})$ が求めれば、例えば条件付平均値、条件付分散値は次式で求めることが出来る。

$$E[\mathbf{x} | \mathbf{y}] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{p}^{(i)} w(\mathbf{p}^{(i)} | \mathbf{y}) \quad (6) \quad \sigma^2_{\mathbf{x} | \mathbf{y}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\mathbf{p}^{(i)} - E[\mathbf{x} | \mathbf{y}])(\mathbf{p}^{(i)} - E[\mathbf{x} | \mathbf{y}])^T w(\mathbf{p}^{(i)} | \mathbf{y}) \quad (7)$$

重要サンプリング密度関数の性質として、分布形が事後の確率密度関数 $p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ に近いことが望ましい。しかしながら $p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ は未知であり、いかに $q(\mathbf{x})$ を与えるかという点が問題となる。本研究では、対象を対数正規確率場に限定し、以下の様にして $q(\mathbf{x})$ を与えることとする。

キーワード：モンテカルロフィルタ、インポートランスサンプリングフィルタ、条件付確率場
連絡先：〒158-8557 世田谷区玉堤 1-28-1, TEL 03-3703-3111, FAX 03-5707-2187

- ① 事前の対数正規確率場と同一の平均値，標準偏差および相関係数を有するガウス性確率場を設定する．対数正規確率場とガウス性確率場は解析的關係があるが，ここでは単純に $LN(\mu, \sigma)$ を $N(\mu, \sigma)$ として置き換える．
- ② 設定されたガウス性確率場に観測情報を与え，ガウス性確率場の更新理論により事後確率場の解析解を求め，ガウス性重要サンプリング密度関数を求める．

3. 数値解析例

1次元空間座標上に設定した無次元距離1間隔の51地点を対象として，事前確率場を $\mathbf{x}^T = [x(z_1), x(z_2), \dots, x(z_{51})]$ とした．また，事前確率場を $LN(10.0, 1.0)$ （変動係数 $\delta = 0.1$ ）および $LN(10.0, 3.0)$ （変動係数 $\delta = 0.3$ ）とした2通りの数値解析例を示す．さらに異なる2地点間の相関係数 ρ_{ij} は共通に次式で与えた．

$$\rho_{ij} = \exp[-|\Delta_{ij}|/5.0] \quad (8) \quad , \quad \Delta_{ij} \text{ は異なる2地点間の距離である.}$$

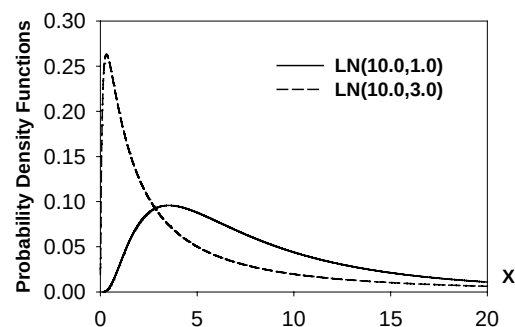


Fig.1 Marginal PDF

Fig.1 に変動係数 δ ごとの周辺確率密度関数を示した．また解析に際して，観測ノイズを含まない観測データが 0, 10, 20, 30, 40, 50 の6地点において1組得られるものとし，事前確率場に対して1回の更新を行うこととした．Fig.2—Fig.7 に変動係数 δ ，サンプル実現値の数 m をパラメータとした条件付平均値および事前確率場の値で正規化した条件付標準偏差を示している．対数正規確率場の理論解と比較して，いずれの場合においても ISF は BF/MCF と比較して精度が良いことがわかる．特に BF/MCF との違いは，観測点における標準偏差の推定結果において顕著に現れている．

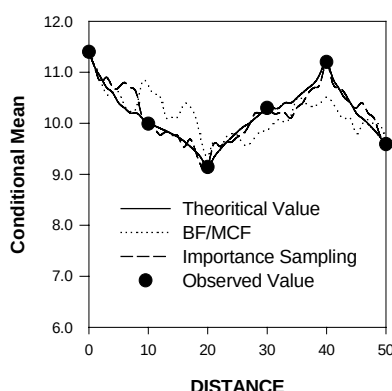


Fig. 2 Conditional Mean ($\delta=0.1$, $m=1000$)

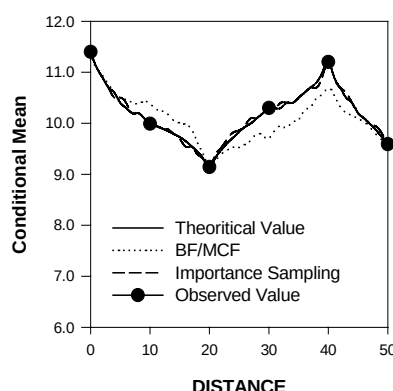


Fig. 4 Conditional Mean ($\delta=0.1$, $m=10000$)

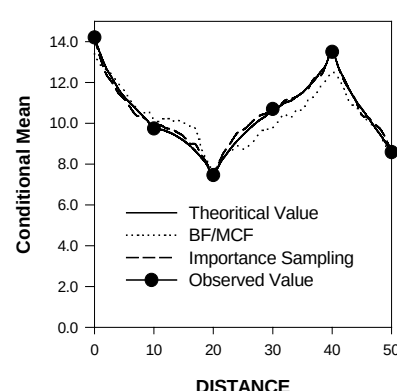


Fig. 6 Conditional Mean ($\delta=0.3$, $m=10000$)

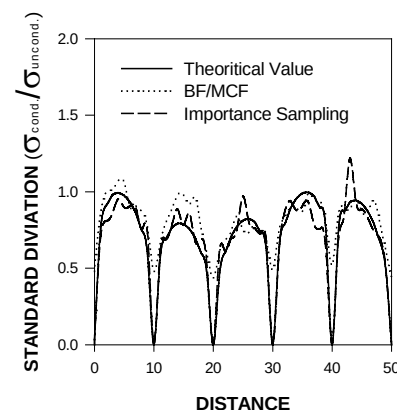
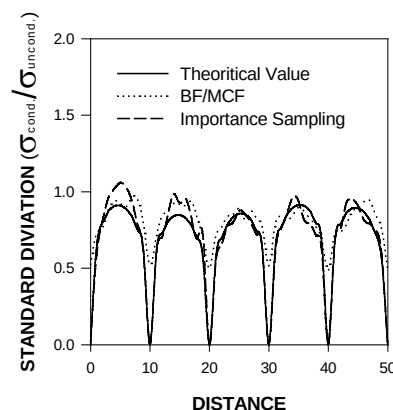
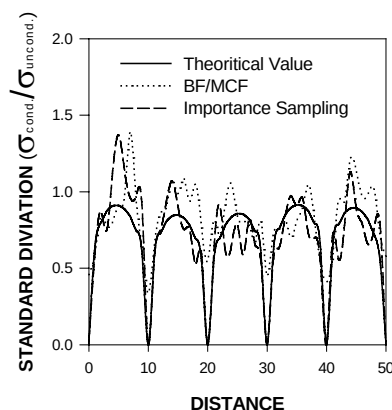


Fig. 3 Normalized Standard Deviation ($\delta=0.1$, $m=1000$) Fig. 5 Normalized Standard Deviation ($\delta=0.1$, $m=10000$) Fig. 7 Normalized Standard Deviation ($\delta=0.3$, $m=10000$)

参考文献: 1) Kitagawa, G.: Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Non-linear State Space Models, *Jour. of Computational and Graphical Statistics*, Vol.5, No.1, pp.1-25, 1996., 2) 丸山 収, 星谷 勝: BF/MCF による対数正規確率場の補間, 土木学会論文集 2003 年 4 月, 3) Tanizaki, H.: Nonlinear and Nonnormal Filter Using Importance Sampling: Antithetic Monte Carlo Integration, *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, Vol.28, No.2, pp.463-486, 1999.