

極限解析を用いた形状最適化に関する研究

京都大学大学院工学研究科 フェロー 田村 武

京都大学大学院工学研究科 学生会員 ○西藤 潤

1 はじめに

構造物の最適設計には種々の要素が考慮されるべきであるが、本研究では力学の観点から見た最適形状設計について考察する。対象は塑性変形が大きく弾性変形が無視できると仮定した構造物であり、剛塑性有限要素法（極限解析）によって最適形状を探索する。最適形状を「ある荷重パターンに対して極限荷重を最大にする形状」と定義する。これは、塑性破壊が生じにくいことを意味する。この最適値基準に加えて、体積に関する制約条件を考え、定式化を行い、それをもとに2次元の最適化問題を解く。

弾性解析のひずみエネルギー最小問題はBanichukによって変分法を用いた定式化がなされているが、極限解析の変分法による極限荷重最大化問題は解かれた例は見当たらない。

2 解析手法

2.1 問題の設定

問題の対象となる構造物を図1に示す。変位速度境界 S_u （式(1)）と応力境界 S_σ （式(2)）とがあり、応力境界 S_σ 上に形状を変化させる境界 S_X が存在する。この境界 S_X 上には外力を与えない（式(3)）。また、領域内で適合条件を満たすとする（式(4)）。このような境界条件のもとで境界 S_X の形状を変化させ、最適な形状の探索を図ることが本研究の目的である。また、制約条件として得られる構造物の体積 V は、ある定められた値 V_0 になるようにする（式(5)）。また、降伏基準は von-Mises の基準に従うものとする。

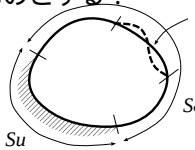


図1: 境界条件

$$\dot{u}_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_u \quad (1)$$

$$t_i = \bar{t}_i \quad \text{on } S_\sigma \quad (2)$$

$$t_i = 0 \quad \text{on } S_X \quad (3)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad \text{in } V \quad (4)$$

$$V = V_0 \quad (5)$$

2.2 変分法の定式化

エネルギー消散率 $D(\dot{\epsilon}_{ij}) (= \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})$ 、物体力 f_i を用いて、汎関数を以下のように定義する。

$$I = \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV + \int_V \lambda \dot{\epsilon}_{kk} dV - \rho \left(\int_V f_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} t_i \dot{u}_i dS - 1 \right) \quad (6)$$

この汎関数 I に対し、変位速度の変分 $\delta \dot{u}_i$ に関して停留値をとると、オイラー方程式として釣り合い式である式(7),(8)を得る。変位速度の変分 $\delta \dot{u}_i$ だけでなく、形状変化の変分 δx_i を考慮し、停留値をとるとオイラー方程式として釣り合い式(7),(8)に加え、式(9)を得る。

$$(\sigma_{ij} + \lambda \delta_{ij}), j + \rho f_i = 0 \quad \text{in } V \quad (7)$$

$$(\sigma_{ij} + \lambda \delta_{ij}) n_j - \rho t_i = 0 \quad \text{on } S_\sigma \quad (8)$$

$$D(\dot{\epsilon}_{ij}) - \rho f_i \dot{u}_i = \text{Const.} \quad \text{on } S_X \quad (9)$$

2.3 問題の等価性

変分法を問題を通して、荷重係数を最大にすることと式(4)を満たすような形状を求めることが等価であることを示す。

式(6)で定義される汎関数 I の変位速度 $\dot{u}_i$ に関する停留値をとることは、汎関数 I を変位速度 $\dot{u}_i$ に関して最小化すること（ $\min_{\dot{u}} I$ ）と等価であることが、上界定理により示すことができる。そして、この停留条件である釣り合い式(7),(8)を満たす時、汎関数 I は荷重係数 ρ と等しくなる（ $\min_{\dot{u}} I = \rho$ ）。これらのことを考えると、荷重係数を形状に関して最大化すること（ $\max_x \rho$ ）は $\max_x \min_{\dot{u}} I$ という max-min 問題の形で書ける。次に、この max-min 問題を x_i と $\dot{u}_i$ に関して同時に解くために、 I の停留値を x_i と $\dot{u}_i$ に関してとる。この停留値をとるための条件は式(7)-(9)であった。つまり、荷重係数を最大化することは、max-min 問題の形で書け、さらにそれは、式(7)-(9)を満たすことと等価である。

本研究では、荷重係数を最大化するために、これと等価な関係にある式(7)-(9)を満足させることを考える。上界法に基づく剛塑性有限要素法を解くと、式(7),(8)を満足するので、さらに式(8)を満足するように形状を変化させばよい。しかし、式(9)を満足させるのは、条件が強過ぎるため、境界 S_X 上で一定の値である μ を用いて $\int_{S_X} \{(D(\dot{\epsilon}_{ij}) - \rho f_i \dot{u}_i) - \mu\}^2 dS$ を最小化することにする。制約条件は、 $V = V_0$ である。これを Newton 法によって繰り返し計算をして解く。

キーワード 最適形状, 極限解析, 変分法, 剛塑性有限要素法

連絡先 京都大学大学院工学研究科社会基盤工学応用力学講座 TEL 075-703-4794

3 解析結果

3.1 空孔の最適形状

空孔の最適化問題を考える（図2）．中央に空孔のある正方形の物体に外側から水平方向の分布荷重 p_x と鉛直方向の分布荷重 p_y をかけたときに，内部にある空孔の最適な形状を求める．解析では，対称性より4分の1の領域のみを対象とする．ここでは， $p_x = p_y$ とする．また，物体力は無視する（ $f_i = 0$ ）．

初期形状を図3，図4に，数値計算の結果，得られた最適形状を図5に示す．空孔の形状は弾性解析同様にほぼ円形になった．図6に計算が収束する様子を示す．縦軸が最終的に得られる荷重係数 ρ_0 によって無次元化した値をとり，横軸に繰り返し計算をとる．

3.2 盛土の最適形状

盛土法面の形状最適化問題を考える．盛土上面に一樣に荷重を加えたときに，最適となる斜面の形状を求める．図7に問題を示す．左右対象であるので，解析領域は右半分のみとする．盛土下面是固定境界とする．また，物体力は無視する．初期形状を図8に，最適形状を図9に示す．法面は滑らかではなく，ギザギザしているが，おおむね法面が直線に近いときに最適形状が得られた．図10に計算が収束する様子を示す．

4 まとめ

本研究で得られた結論を述べる．

- 極限荷重最大化問題を境界上の別の条件に置き換え，その後者に基づいて定式化を示した．
- 空孔，盛土の最適形状を求めることができた．

問題点を述べる．

- 変化させる境界 S_X を含む領域が剛体的な運動をするような場合では収束性が悪くなる．
- 形状を変化させるたびに剛塑性有限要素法を用いて計算するので，計算量が多い．

参考文献

1. Banichuk, N V: *Problems and methods of optimal structural design*, Plenum Press, 1983
2. Gelfand, I M and Fomin, S V: 変分法, 関根智明訳, 総合図書, 1970
3. 西藤潤: 極限解析を用いた形状最適化に関する研究, 京都大学大学院土木工学専攻修士論文, 2003
4. 田村武, 西藤潤: 有限要素法および境界要素法による弾性体のコンプライアンス最小形状の探索, 土木学会論文集（投稿中）

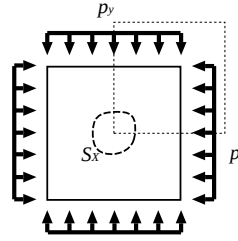


図2: 空孔の最適化問題

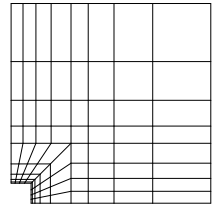


図3: 初期形状

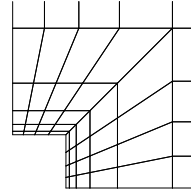


図4: 初期形状（拡大図）

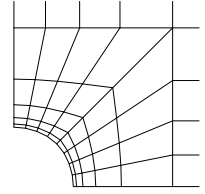


図5: 最適形状

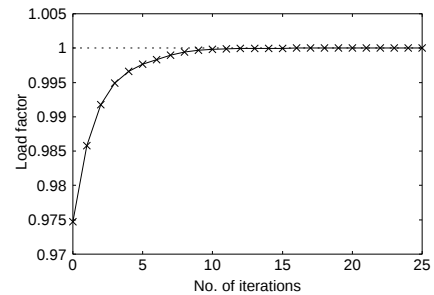


図6: 無次元化した荷重係数 ρ/ρ_0 と繰り返し回数

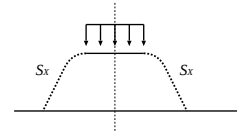


図7: 盛土の最適化問題

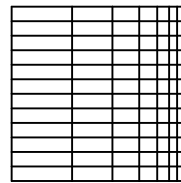


図8: 初期形状

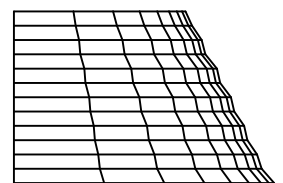


図9: 最適形状

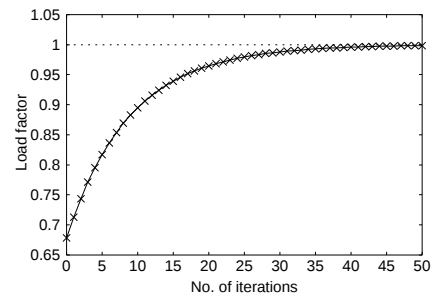


図10: 無次元化した荷重係数 ρ/ρ_0 と繰り返し回数