# 離散的近似解法による積層偏平シェルの非線形解析

長崎大学　大学院　学生会員　○神谷 幸祐　　長崎大学　工学部　正会員　森田 千尋
長崎大学　工学部　正会員　松田　浩　　長崎大学　工学部　正会員　崎山　毅
長崎大学　工学部　正会員　黄　美

## 1　はじめに

軽量，比強度，比剛性に優れ，あらゆる分野の構造要素に用いられ，適用範囲が広がりつつある FRP(繊維強化タイプ複合材) は，それを積層状にし積層構造にすることにより強い異方性を呈し，有利な材料設計が可能となる。そこで本研究では，積層板に僅かに曲率をつけた FRP 積層偏平シェルの非線形挙動を明らかにすることを目的としている。

## 2　解析理論

### 2.1　基礎理論

積層偏平シェルの非線形解析における増分形の応力 – ひずみ関係式は $k$ 番目の層では，以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{ep11} & \bar{Q}_{ep12} & \bar{Q}_{ep16} \\ \bar{Q}_{ep12} & \bar{Q}_{ep22} & \bar{Q}_{ep26} \\ \bar{Q}_{ep16} & \bar{Q}_{ep26} & \bar{Q}_{ep66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{bmatrix}_k$$

断面力に関しては，図 2 の様にシェル厚の中心から $z$ 軸をとり，層と層の境界面を $z_0, z_1 ..., z_N$ とする。積層シェルでは各層ごとに応力が異なるため，応力をシェル厚方向に積分すると次のように定義される。

$$(\Delta N_x, \Delta N_y, \Delta N_{xy}) = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\Delta\sigma_x^{(k)}, \Delta\sigma_y^{(k)}, \Delta\tau_{xy}^{(k)}) dz$$

$$(\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_{xy}) = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\Delta\sigma_x^{(k)} z, \Delta\sigma_y^{(k)} z, \Delta\tau_{xy}^{(k)} z) dz$$

積層偏平シェルに増分荷重が載荷したときの力の釣り合いから，基礎微分方程式を求める。この基礎微分方程式の断面力及び変形に関して無次元量を導入しそれぞれ領域において面積分した後，積分方程式に変換する。これに積分方程式の近似解法を応用すると，離散解は次式で表される。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{d=1}^{10} \left( \sum_{f=0}^{i} a_{pijfd} \Delta X_{rf0} + \sum_{g=0}^{j} b_{pijgd} \Delta X_{s0g} \right) + q_{pij}$$

ここで $\Delta X_{rf0}$，$\Delta X_{s0g}$ は積分定数，$a_{pijfd}, b_{pijfd}$ は断面形状を伝えるマトリクス，$q_{pij}$ は荷重項である。

### 2.2　解析モデル及び降伏条件

数値解析例として用いた積層偏平シェルは，0° と 90° の層のみから成るクロスプライ積層偏平シェルである。本解析では，各層は完全に密着しているものとし層間のズレはないものと仮定している。また，ひずみ硬化は考えないものとする。

#### 2.2.1　材料的非線形解析

本研究では異方性材料の降伏条件として以下に示す Hill の降伏条件式 [1] を用いる。平面応力状態において

$$\left(\frac{\sigma_L}{F_L}\right)^2 - \frac{\sigma_L \sigma_T}{F_L^2} + \left(\frac{\sigma_T}{F_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{LT}}{F_{LT}}\right)^2 = 1$$

となる。材料特性としては表 1 に示すグラファイト / エポキシ材を仮定している。なお，$F$ は降伏応力で，添字の $L$ は繊維方向，$T$ は繊維直角方向である。

表 1: グラファイト / エポキシ複合材の材料定数及び降伏応力

| | | |
|---|---|---|
| 弾性係数 | : | $E_T = 10^6 psi$(6.89GPa),$E_L/E_T = 25$ |
| せん断弾性係数 | : | $G_{LT}/E_T = 0.5$,$G_{TT}/E_T = 0.2$ |
| 降伏応力 | : | $F_L = 25.0 ksi$(172.4MPa) |
| | | $F_T = 5.0 ksi$(34.5MPa) |
| | | $F_{LT} = 3.5 ksi$(24.1MPa) |
| ポアソン比 | : | $\nu_{12} = 0.25$ |
| シェル厚比 | : | $a/h = 50$ |
| 無次元量パラメータ | : | $P = qa^2/M_p$,$W = D_0\delta_c/a^2 M_p$ |
| 塑性モーメント | : | $M_p = F_T h^2/4$ |

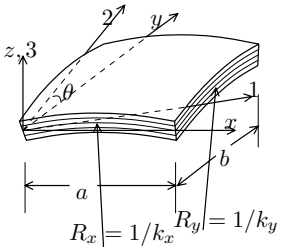


図 1: 積層偏平シェルの直交異方性主軸

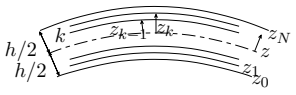


図 2：基準線

#### 2.2.2　幾何学的非線形解析

幾何学的非線形解析における材料特性は表 2 の値を使用し，それ以外は材料的非線形解析の場合と同値を用いた。

表 2: 材料特性

| | | |
|---|---|---|
| ポアソン比 | : | $\nu_{12} = 0.15$ |
| シェル厚比 | : | $a/h = 100$ |
| 曲率 (E.P.) | : | $ak_x = ak_y = 0.1$ |

キーワード　FRP，積層偏平シェル，離散的近似解法，非線形挙動
連絡先　〒 852–8521 長崎市文教町 1–14　TEL & FAX 095–819–2591

## 3 解析結果および考察

### 3.1 材料的非線形解析結果

まず，本解法の収束性及び精度を明らかにするために，等分布荷重を受ける四辺単純支持 (ピン) された 5 層の積層偏平 E.P.(楕円放物線) シェルの 4 分の 1 部分において，$x, y$ 方向の分割数を $2, 3, 4, 5$ 分割，シェル厚方向の分割数を 10 分割とし，本解析解と FEM 解析による解との比較を行った。図 3 には中央点に関する荷重 – たわみ曲線を示し，解析値を曲線で，FEM による解をプロットで示している。本解析値は $x, y$ 方向の分割数を上げることで FEM 解析による解とほぼ一致してくることが確認でき，本解析は有効であるといえる。

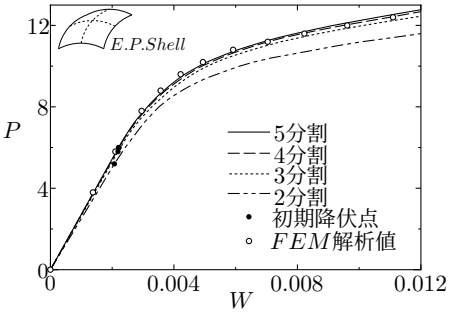


図 3: 荷重 – たわみ曲線 (対称積層)

次に積層順序が与える影響を明らかにするために 4 層からなる対称，逆対称クロスプライ積層シェルを用いて解析を行った。荷重 – たわみ曲線では，非線形挙動にはほとんど違いが見られなかったため塑性域進行状態を比較した。図 4 に示すように，どちらも中央部の上面から塑性化が開始し，内部へと進行していく。荷重が増加するにつれ，繊維と直角方向進行が早くなることが確認できる。これは積層偏平シェルが強い異方性を示していることと考えることが出来る。

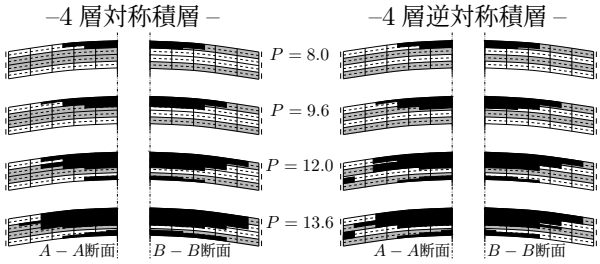


図 4: 塑性域進行断面図

つづいて，シェルの曲面形状が非線形挙動に及ぼす影響を調べるため，5 層の積層偏平シェルに関して，E.P.,H.P.(双曲放物線),C.(円筒) シェルの中央点に関する荷重 – たわみ曲線を図 5 に示す。図より剛性は C. シェルが最も弱く，E.P.,H.P. シェルの挙動は初期降伏点までほぼ同じである。塑性域が進展していくと，若干ではあるが E.P. シェルはたわみが大きくなっていることがわかる。

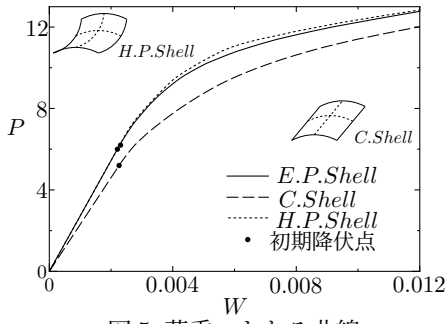


図 5: 荷重 – たわみ曲線

### 3.2 幾何学的非線形解析結果

境界条件を四辺単純支持とし，クロスプライ積層偏平シェルに等分布荷重が満載される場合の幾何学的非線形解析を行った。図 6 は $x, y$ 軸方向の分割数を 2,3,4,5 と変化させた場合の 2 層からなる積層偏平シェルの中央点における荷重 – たわみ曲線である。比較解には Liao and Reddy による解 [2] を用いた。図より，幾何学的非線形解析においても，$x, y$ 軸方向の分割数を大きくするにつれ本解析値は一様に収束し，Liao and Reddy による比較解ともほぼ一致していることから本解析は有効であるといえる。

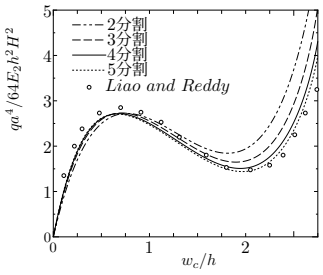


図 6: 荷重 – たわみ曲線

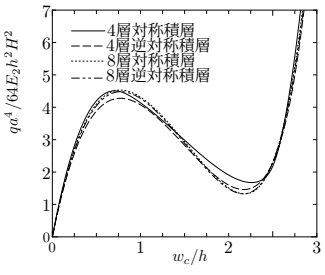


図 7: 荷重 – たわみ曲線

図 7 は 4 層及び 8 層からなる対称・逆対称積層偏平シェルの中央点における荷重 – たわみ曲線である。同図より，4 層に積層した場合は，逆対称積層の方がたわみが大きくなっていることがわかる。しかし，8 層に積層した場合は違いがほとんど見られない。つまり，積層数が多くなるにつれ，積層順序による影響は小さくなっていくといえる。

## 4 まとめ

本解法に基づく解析結果と既往の数値解との比較を行った結果，本解法は積層偏平シェルの材料的・幾何学的非線形解析において有効であるといえる。また，任意の積層数，積層順序，断面形状および境界条件を有する積層偏平シェルの材料的・幾何学的非線形挙動を明らかにした。

[参考文献] 1) Hill, R. : Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol.193, pp.281–297, 1948 2) Liao, C.L. and Reddy, J.N. : Comput. Structures, Vol.34, No.6, pp.805-815, 1990