

伝達マトリックス法を組み込んだ任意高次摂動法によるはりの非線形解析

東京理科大学 学生員 秋永 高史

東京理科大学 正会員 臼木 恒雄

1. まえがき

非線形微分方程式を支配方程式とするはりの問題は多いが、厳密な理論解の存在する場合は多くない。理論解の求められていない方程式は数値解で代用せざるを得ない。数値解法として摂動法^{1),2)}が報告されている。しかし、既往の摂動法の報告では数項の摂動項しか考慮されていない。そこで、本論文では混合法に属する伝達マトリックス法を組み込んだ摂動法を提案する。筆者らの知る限りでは、摂動法と伝達マトリックス法を組み合わせた方法はほとんど報告されていない。数値計算例として、軸伸縮およびせん断変形を無視した張り出し柱の *elastica* 問題を解き、厳密解である楕円積分の解³⁾と比較した。

2. 理論展開

断面力のつり合い条件および各断面力に対応する構成則を組み合わせ、状態量 $\mathbf{z}(s)$ の支配方程式

$$\frac{d\mathbf{z}(s)}{ds} = \mathbf{f}(s) \quad (1)$$

を得る。この式は一般的に非線形方程式である。非線形問題を解くために摂動法を稼動させる。状態量 $\mathbf{z}(s)$ 、その導関数 $\mathbf{z}'(s)$ および右辺のベクトル関数 $\mathbf{f}(s)$ をあるパラメータ ε のべき級数の関数と仮定する。

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(s, \varepsilon) &= \mathbf{z}_0(s) + \mathbf{z}_1(s) \varepsilon + \mathbf{z}_2(s) \varepsilon^2 + \cdots, \quad \mathbf{z}'(s, \varepsilon) = \mathbf{z}'_0(s) + \mathbf{z}'_1(s) \varepsilon + \mathbf{z}'_2(s) \varepsilon^2 + \cdots \\ \mathbf{f}(s, \varepsilon) &= \mathbf{f}_0(s) + \mathbf{f}_1(s) \varepsilon + \mathbf{f}_2(s) \varepsilon^2 + \cdots \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入して、摂動パラメータのべきごとに括り、両辺比較により摂動方程式を得る。

支配方程式(1)右辺の関数ベクトル $\mathbf{f}(s; \varepsilon)$ の導関数の計算は高階になるほど煩雑になる。そこで、関数ベクトル $\mathbf{f}(s; \varepsilon)$ を便宜的に係数マトリックス $\mathbf{A}(s; \varepsilon)$ と状態量ベクトル $\mathbf{z}(s)$ の積として、

$$\mathbf{z}'(s) = \mathbf{A}(s) \mathbf{z}(s) \quad (3)$$

と表示する。0次摂動および1次摂動の微分方程式は

$$\mathbf{z}'_0(s) = \mathbf{A}_0(s) \mathbf{z}_0(s), \quad \mathbf{z}'_1(s) = \mathbf{A}_1(s) \mathbf{z}_1(s) \quad (4)$$

と表現できる。係数 $\mathbf{A}_1(s)$ は副対角線に对称と交代対称が石畳ブロック状になる正方マトリックスである。この規則性を活かして高次の摂動項を計算すれば、計算は単純な微分の繰り返しとなり、任意高次の摂動項まで取り入れることが可能になる。これから、連立1階常微分方程式である個々の摂動方程式は以下のごとく表せる。

$$\mathbf{z}'_n(s) = \mathbf{A}_1(s) \mathbf{z}_n(s) + \mathbf{b}_n(s) \quad (n=1, 2, \cdots) \quad (6)$$

但し、非斉次項ベクトルは $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ であり、 $n=2$ 以上において

$$\mathbf{b}_n(s) = \frac{(n-1)!}{n!} C_1 \mathbf{A}_1^{(1)}(s) \mathbf{z}_{n-1}(s) + \cdots + \frac{(n-r)!}{n!} C_r \mathbf{A}_1^{(r)}(s) \mathbf{z}_{n-r}(s) + \cdots + \frac{1!}{n!} \mathbf{A}_1^{(n-1)}(s) \mathbf{z}_1(s) \quad (7)$$

となっている。ここで、 $(\cdots)^{(n)}$ は ε に関する n 階微分を意味する。

基本行列を Φ とすると、各摂動方程式の一般解は

$$\mathbf{z}_n(s) = \Phi(s) \mathbf{z}_n^L + \Phi(s) \int_0^s \Phi^{-1}(\sigma) \mathbf{b}_n(\sigma) d\sigma \quad (n=1, 2, \cdots) \quad (8)$$

となっている。これらを摂動展開式(2.a)に代入すれば、求める状態量 $\mathbf{z}(s)$ が決定できる。

Keywords : 非線形はり方程式, 摂動法, 伝達マトリックス法, 座屈後経路, Euler 柱の *elastica*, 常微分方程式系
東京理科大学理工学部土木工学科(〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

3. 数値計算例

柱の軸線の位置座標を s とすると, elastica 問題の状態方程式は次式となる.

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \\ \theta(s) \\ M(s) \\ N(s) \\ Q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta(s) \\ -(1 - \cos \theta(s)) \\ \frac{M(s)}{EI} \\ -N(s) \sin \theta(s) + Q(s) \cos \theta(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

この状態方程式に式(6),(7)を適用し, 各摂動方程式を求め, 伝達計算を行う. 本報告では張り出し柱を解析した.

4. 解析結果とまとめ

ここに提案する方法により 30 次の摂動項まで考慮して伝達計算を行った. 自由端のたわみ w_l を以下に示す.

$$\begin{aligned} \frac{w_l}{l} = & \frac{2\epsilon}{\pi} - \frac{5\epsilon^3}{24\pi} + \frac{53\epsilon^5}{7680\pi} - \frac{83\epsilon^7}{516096\pi} - \frac{2767\epsilon^9}{5945425920\pi} - \frac{180053\epsilon^{11}}{1046394961920\pi} - \frac{172121381\epsilon^{13}}{13059009124761600\pi} - \frac{4929951049\epsilon^{15}}{4387827065919897600\pi} \\ & - \frac{37123307626807\epsilon^{17}}{381916467817667887104000\pi} - \frac{1786983468780593\epsilon^{19}}{208984691189827867823308800\pi} - \frac{5353531237273469951\epsilon^{21}}{7021885623978216358863175680000\pi} \\ & - \frac{390817187501605765519\epsilon^{23}}{5684918601172763964135627030528000\pi} - \frac{3415311064744182178831961\epsilon^{25}}{545752185712585340557020194930688000000\pi} \\ & - \frac{352042147046825263878878779\epsilon^{27}}{612988854992375854513645082946148761600000\pi} - \frac{2113431715288458728836643993623\epsilon^{29}}{39819756020304735509206384588181823553536000000\pi} \end{aligned} \quad (10)$$

この結果は厳密解である楕円関数の Taylor 展開と完全に一致している. 得られた結果よりたわみ曲線(図1)および座屈後経路(図2, 3, 4)を描き, 厳密解と比較した.

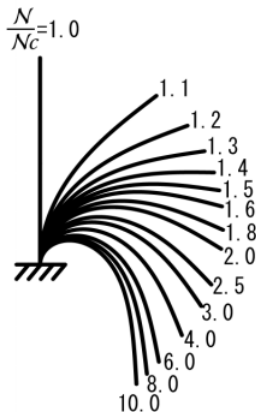


図1 各荷重段階でのたわみ曲線

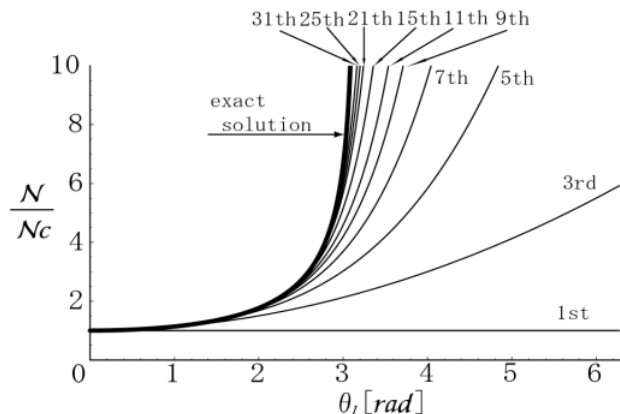


図2 たわみ角-荷重関係

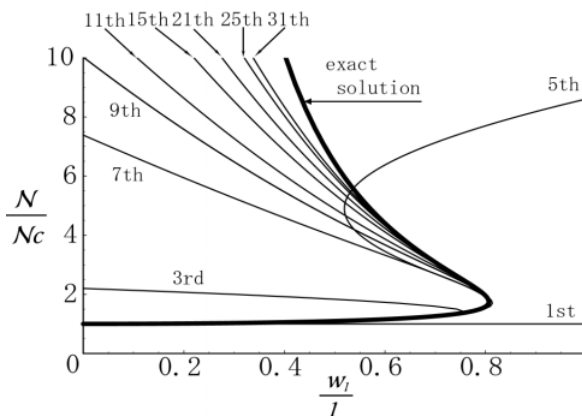


図3 たわみ-荷重関係

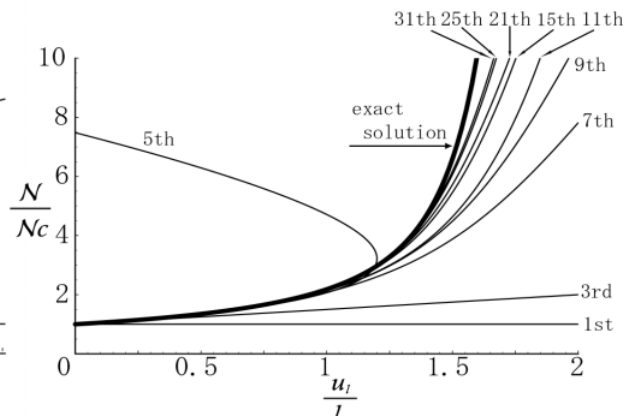


図4 軸方向変位-荷重関係

参考文献

- 1) Croll, J.G.A. : I.J.M.S, Vol.13, 1971. 2) Pignataro et al. : I.J.S.S, Vol.4, 1982.
- 3) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : THEORY OF ELASTIC STABILITY, McGraw-Hill, 1961.