

Rayleigh 波特特性方程式から導かれるリーキングモードの性質

(株) CRC ソリューションズ 正会員 秋山伸一

1. はじめに

Rayleigh 波特特性方程式からは、Rayleigh 波の他にリーキングモードも導かれることが知られている¹⁾。リーキングモードは Rayleigh 波とは異なり、固有値が波動の放射条件を満足しない複素平面に存在するため、これまで余り顧みられなかった。これに対して、著者は不整形地盤の地震応答にリーキングモードが含まれることを指摘してきた²⁾。このように、地震動に与えるリーキングモードの影響は無視し得ない場合があると考えられる。そこで、本文ではリーキングモードの性質について検討を加える。

2. Rayleigh 波特特性方程式の複素根

半無限弾性体の Rayleigh 波特特性方程式を次式に示す。

$$F(\xi) = (2\xi^2 - k_s^2)^2 + 4\xi^2 \eta_p \eta_s = 0 \quad (1)$$

$$\text{ただし, } \eta_p = \sqrt{k_p^2 - \xi^2}, \quad \eta_s = \sqrt{k_s^2 - \xi^2},$$

$$k_p = \omega/C_p, \quad k_s = \omega/C_s$$

ここに、 ω は角振動数、 ξ は水平方向の波数、 C_p は P 波速度、 C_s は SV 波速度を表す。また、ポアソン比 ν により、 $k_p/k_s = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$ となる。したがって、式(1)から求められる根はポアソン比によって変化する。

上記を踏まえて求められる式(1)の根を図-1 に示す。図の横軸はポアソン比、縦軸は SV 波の波数 k_s で無次元化された波数 ξ の実部を示す。図中の ξ_R は実根であり、Rayleigh 波の固有値を表す。一方、 ξ_L はポアソン比が $\nu < \nu_c$ となる区間で実根となり、 $\nu > \nu_c$ では共役複素根となる。このように、 ξ_L は ξ_R に比べて、ポアソン比によって大きく変化する。

複素平面上における ξ_L の軌跡を図-2 に示す。図の横軸は P 波の波数 k_p で無次元化された波数の実部を表し、縦軸は波数の虚部を実部で無次元化して示す。図中の数値はポアソン比を表し、この時の根の位置を●印で示す。ポアソン比が $\nu < \nu_c$ では、根は実軸上に位置し、 $\nu = \nu_c$ で 2 つの実根は重根となる。さらに、 $\nu > \nu_c$ では 2 つの根は共役複素根となり、一方は第 4 象限に移り、他方は第 1 象限に移る。ここで、第 1 象限と第 4 象限では、P 波や SV 波についての放射条件が満足されない。

キーワード：Rayleigh 波、リーキングモード、特性方程式、半無限弾性体、波動伝播

連絡先：(株)CRC ソリューションズ（〒136-8581 江東区南砂 2-7-5, TEL:03-5634-5791, FAX:03-5634-7337）

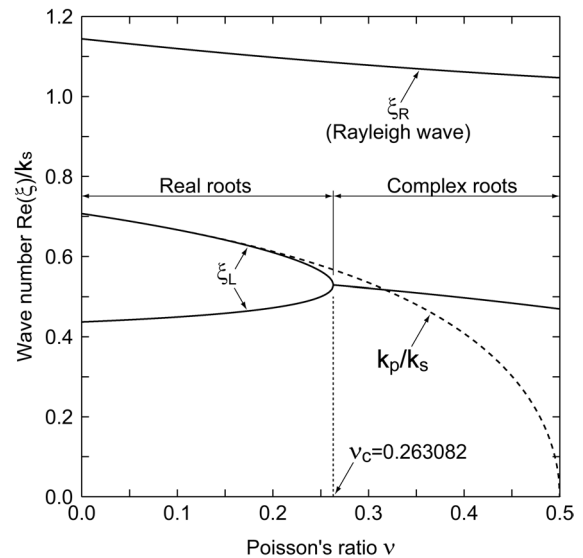


図-1 Rayleigh 波特特性方程式の根（実部）

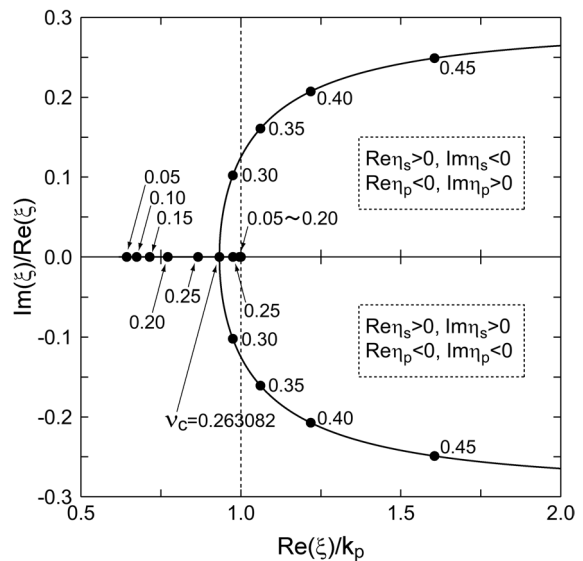


図-2 Rayleigh 波特特性方程式の複素根の軌跡

すなわち、複素根 ξ_L は Rayleigh 波の固有値 ξ_R とは異なり、波動の放射条件を満足しない複素平面上に分布することに注意しなければならない。

3. 複素根から導かれる固有モードの性質

Rayleigh 波の特性方程式から導かれる固有モードは P 波と SV 波による地表面からの反射波として表される。そこで、まず反射波のポテンシャルを次式で表す。

$$\begin{aligned} \phi' &= A' \exp(-i\xi x - i\eta_p z + i\omega t) \\ \varphi' &= B' \exp(-i\xi x - i\eta_s z + i\omega t) \end{aligned} \quad (2)$$

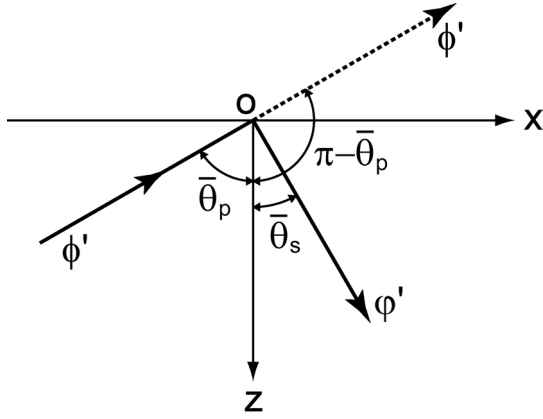


図-3 リーキングモードの波動伝播

つぎに、式(2)に示す反射波ポテンシャルの空間座標と波数を、次のように円筒座標で表す。

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta \\ \xi_L &= k_s \sin \theta_s = k_p \sin \theta_p \\ \eta_s &= k_s \cos \theta_s, \eta_p = -k_p \cos \theta_p \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\theta_s = \bar{\theta}_s - i\hat{\theta}_s$ および $\theta_p = \bar{\theta}_p - i\hat{\theta}_p$ と複素数に拡張すると、式(3)の波数は次式の複素数に展開される。

$$\begin{aligned} \xi_L &= \bar{K}_s \sin \bar{\theta}_s - i\hat{K}_s \cos \bar{\theta}_s = \bar{K}_p \sin \bar{\theta}_p - i\hat{K}_p \cos \bar{\theta}_p \\ \eta_s &= \bar{K}_s \cos \bar{\theta}_s + i\hat{K}_s \sin \bar{\theta}_s \\ \eta_p &= -\bar{K}_p \cos \bar{\theta}_p - i\hat{K}_p \sin \bar{\theta}_p \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $\bar{K}_s = k_s \cosh \hat{\theta}_s, \hat{K}_s = k_s \sinh \hat{\theta}_s$
 $\bar{K}_p = k_p \cosh \hat{\theta}_p, \hat{K}_p = k_p \sinh \hat{\theta}_p$

式(4)によると、 ξ_L は、複素平面第4象限に位置しており、減衰しながら水平方向に伝播する波動を表す。一方、 η_p や η_s は増幅しながら鉛直方向に伝播する波動を表す。ここで、式(4)を式(2)に代入すると、P波とSV波の反射波ポテンシャルは、次式で表される。

$$\begin{aligned} \phi' &= A' \exp \{ -i\bar{K}_p r \cos(\pi - \theta - \bar{\theta}_p) \\ &\quad - \hat{K}_p r \sin(\pi - \theta - \bar{\theta}_p) + i\omega t \} \\ \phi'' &= B' \exp \{ -i\bar{K}_s r \cos(\theta - \bar{\theta}_s) \\ &\quad - \hat{K}_s r \sin(\theta - \bar{\theta}_s) + i\omega t \} \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)によると、P波の伝播方向は $\theta = \pi - \bar{\theta}_p$ で表されるのに対し、SV波成分の伝播方向は $\theta = \bar{\theta}_s$ となる。これは図-3に示すように、 $\theta = \bar{\theta}_p$ の角度で下方から入射するP波が地表面で反射し、 $\theta = \bar{\theta}_s$ の角度で下方に向うSV波となる波動伝播に対応する。しかも、P波やSV波の振幅は図-3の伝播方向に沿って一定である。

以上により、Rayleigh波特性方程式の複素根から導かれる固有モードは地表面から地中に波動のエネルギーを放射するリーキングモードとして解釈される。そして、このようなリーキングモードの振舞いは地表面に

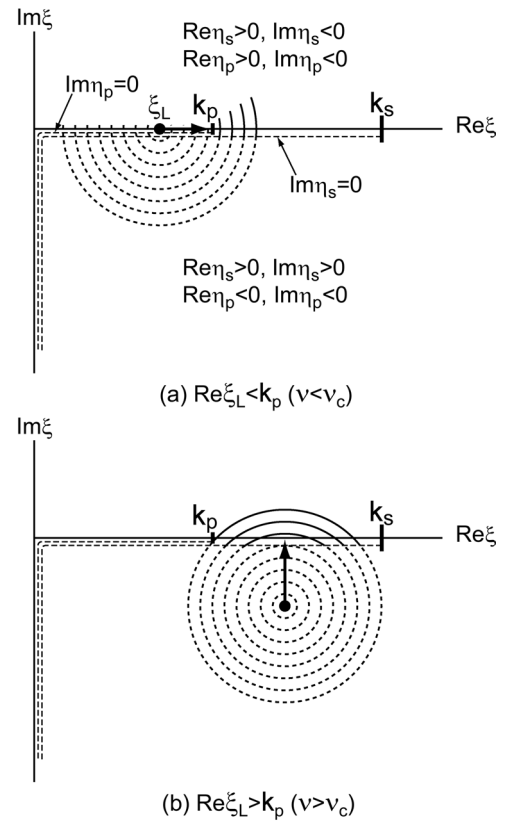


図-4 観測されるリーキングモードの影響

おけるP波とSV波の入射・反射の関係から理解できる。

ここで、波動の放射条件を満足しない複素平面上で定義されるリーキングモードが観測される仕組みを図-4に示す。まず、リーキングモードの固有値に対応する極が分岐点 k_p より左側に位置する(a)場合、分岐点と切断を通過して現れた部分がP波の位相速度を持つ波動として観測される。一方、極が分岐点よりも右側に位置する(b)場合には、P波よりも遅いがSV波よりも位相速度が速い波動として観測される。すなわち、リーキングモードは前記の入射と反射がそのまま観測されるのではなく、分岐点と切断を通過して放射条件を満足する複素平面に現れた部分が観測される。

4. まとめ

Rayleigh波の特性方程式から導かれるリーキングモードの挙動は、P波とSV波の入射と反射の関係から説明できる。ただし、実際には波動の放射条件を満足しない複素平面上に存在する極の影響のうち、分岐点や切断を通過して放射条件を満足する複素平面に現れた部分がリーキングモードとして観測される。

参考文献

- 1) 田治米鏡二：弾性波動論の基礎，槇書店，1994
- 2) 秋山伸一：モード展開手法を用いた不整形地盤における面内波動の分析，第26回地震工学研究発表会，pp.505-508，2001