

## 熱流を受ける矩形介在物とクラックの干渉問題

名古屋工業大学大学院 盛 偉  
 名古屋工業大学 正会員 王 険峰  
 名古屋工業大学 正会員 長谷部 宣男

## 1. はじめに

本論文では一様熱流を受ける無限板に存在する矩形介在物(矩形孔周辺が剛に補強されている)と、その近傍にクラックが存在する介在物とクラックの干渉問題の解析を行う。問題の解析あたり、重ね合わせの原理を用い、解析問題(問題 A)を一様熱流のみ(問題 B)、dislocation(問題 C)、熱源対(問題 D)に分けて考える。それぞれの問題について複素応力関数を求め、クラックの条件が満足するように重ね合わせるにより求められる。解析には、解析領域を単位円外に等角写像する有理写像関数を用い、単位円外で正則な複素応力関数の一般解を誘導する。そしてクラック先端での応力拡大係数を求める。

## 2. 写像関数

図 1 に示す矩形介在物を有する無限領域(z-plane)を、単位円外(-plane)に写像する分数式の和の形で表される有理写像関数 $\omega(\zeta)$ は次式で与えられる[1]。

$$z = \omega(\zeta) = E_0 \zeta + \sum_{k=1}^{36} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_{-1} \quad (1)$$

## 3. 複素応力関数の誘導

外力および変位の境界条件は次式で表される。

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma) + \psi(\sigma)} = i \int (\sigma_x + i\sigma_y) ds \quad (2)$$

$$\kappa \phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma) - \psi(\sigma)} + 2G\alpha' \int \Psi(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma = 0 \quad (3)$$

上式(3)で変位  $u, v$  を零としている。つまり、孔の周辺を剛に補強したモデル、または剛な介在物をモデルとしている。ここに、 $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$  は単位円外で正則な複素応力関数である。式(2)、(3)の  $\sigma$  は単位円上の  $\zeta$  を表す。G はせん断弾性定数、 $\alpha'$  は線膨張係数、 $\kappa$  はポアソン比による材料定数である。平面応力状態のとき、 $\alpha' = \alpha$   $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ 、平面ひずみ状態のとき、 $\alpha' = (1+\nu)\alpha$   $\kappa = 3-4\nu$  と表される。

$\Psi(\zeta)$  は複素温度関数である。材料の熱伝導率  $k$  とし、単位時間、単位面積あたりの  $x$  軸と角をなす一様熱流  $q$  が作用する時

$$\Psi(\zeta) = -\frac{q}{k} \left( E_0 \zeta e^{-i\delta} + \frac{\bar{E}_0}{\zeta} e^{i\delta} \right) \quad (4)$$

式(3)の左辺の第 4 項は熱弾性問題の特有の項で、温度により生じる変位を表す。積分の結果孔の周りを 1 周すると、 $\log$  項による変位の食い違いが生じる。その食い違いを消去するため、次式の  $\phi_1(\zeta), \psi_1(\zeta)$  を考え、複素応力関数  $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$  を次式の形で表す。

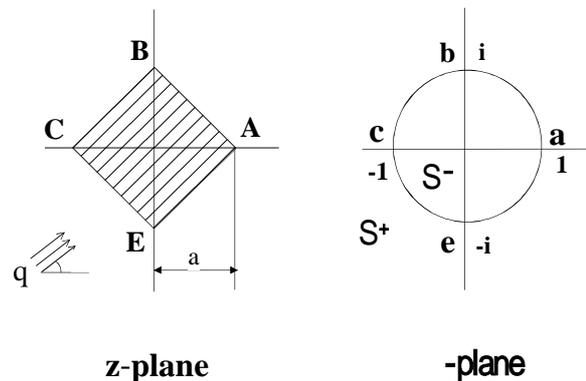


図 1 矩形介在物と単位円

キーワード 熱弾性、一様熱流、矩形介在物、写像関数、変位境界値問題、応力拡大係数、  
 連絡先 466-8555 名古屋市昭和区御器所町 名古屋工業大学 社会開発工学科 Tel. 052-735-5482

$$\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta), \quad \phi_1(\zeta) = A \log \zeta \quad (5) \quad \psi(\zeta) = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta), \quad \psi_1(\zeta) = B \log \zeta \quad (6)$$

応力、変位の一価性より、 $A, B$  が決められる。また、 $A = \bar{B}$  の関係も得られる。

式(5)、(6)を変位の境界条件式(3)および(3)の共役式に代入して、 $d\sigma/2\pi i(\sigma - \zeta)$  を乗じてコーシー積分すると、 $\phi_2(\zeta), \psi_2(\zeta)$  が決められる。

問題 C において介在物の外側に dislocation  $h_j(t)$  を仮定したが、それを利用して、クラックの表面が free、変位の一価性の条件より積分方程式が求められ、その数値計算により  $h_j(t)$  が求められる。数値計算にあたり  $h_j(t) = H_j(t)/\sqrt{b^2 - t^2}$ , ( $j = n, \tau$ ) とおいている。b はクラックの長さの半分である。

問題 D において熱源対  $\gamma(t)$  のグリーン関数を求め、それを利用してクラックを横切って熱の出入りが無い、すなわち複素温度関数の虚部で表される合熱流束がクラック上で 0 になる条件より積分方程式が求められ、その数値計算により  $\gamma(t_j)$  が求められる。

4. 応力拡大係数

クラック両端 BA の無次元化した応力拡大係数は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} F_{A,B} \\ F_{A,B} \end{Bmatrix} = \frac{k}{\alpha q G R} \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \begin{Bmatrix} K_{A,B} \\ K_{A,B} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここに、a は矩形介在物の対角線の長さの半分である。

図 2 は  $\theta = 0^\circ$  で熱流が進入する場合の、クラック BA の位置の違いによる  $F_{IB}$  を示す。横軸は直線境界上でクラックの占める割合を示す。a/d が大きいほど、つまり、クラックが介在物に近いほど、応力拡大係数が大きな値をとり、クラックが進展するに従って増加する傾向にあるが、進展初期段階での増加率が大きく、それ以降は比較的なだらかに増加していく。

図 3 は  $\theta = 90^\circ$  で熱流が進入する場合、クラック中心の座標を一定にし、クラックの向きによる  $F_{IB}$  を示す。この場合、介在物は回転しないとしている。f/a が大きく、つまりクラックが介在物から遠く離れるにつれて、介在物の影響が小さくなり、mode の値が小さくなっていくことがわかる。

5. まとめ

介在物とその近傍にクラックがある無限板に一樣熱流が作用する場合の変位境界値問題の一般解を誘導した。クラック先端での応力拡大係数を算出することで、クラックの進展を解析できる。また、写像関数の係数の変えることにより任意形状の解析ができる

参考文献

[1] K.Yusikawa & N.Hasebe, J.App, Mech.ASME, Vol.66, 1999 204 210

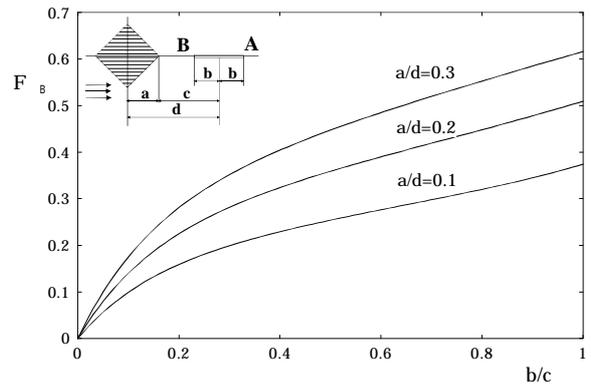


図 2 B 点の応力拡大係数(  $\theta = 0^\circ$  )

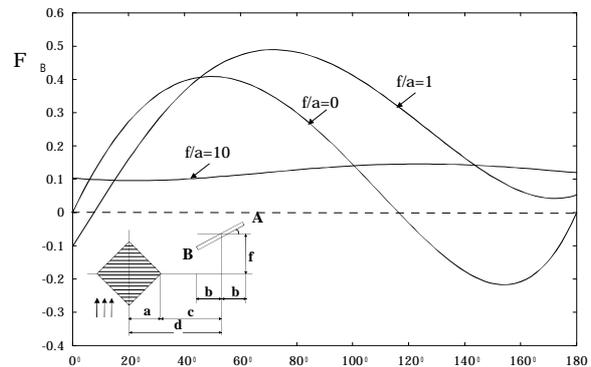


図 3 A 点の応力拡大係数  
(b/a=1, d/a=2.5,  $\theta = 90^\circ$ )