

任意形状孔を有する弾性体に dilatation が存在する場合の解

名古屋工業大学 学生会員 ○高山真揮
 名古屋工業大学 正員 長谷部宣男
 名古屋工業大学 正員 王陔峰

1. はじめに

無限領域内に任意形状孔を有し、特異点(dilatation)が存在する場合の外力境界値問題における一般解の誘導、及び応力分布を求めることを目的とする。解析方法としては、分数の和の形で表される有理写像関数と単位円外で正則な複素応力関数を用いる。解析例として矩形孔、円孔を考える。

2. 写像関数

図1に示す、矩形孔を有する無限領域(z-plane)を例に考える。この解析形状を単位円外部(ζ -plane)に等角写像する写像関数は、Schwarz-Christoffel の変換公式を用いて次式で表される。

$$Z = K \int \frac{(\zeta-1)^{0.5}(\zeta-i)^{0.5}(\zeta+1)^{0.5}(\zeta+i)^{0.5}}{\zeta^2} d\zeta \quad (1)$$

ここで最終的に次式の有理写像関数を作る[1]。

$$z = \omega(\zeta) = E_0 \zeta + \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_{-1} \quad (2)$$

3. 境界条件式と応力関数

解析には複素応力関数による方法を用いる。単位円外で正則な二つの複素応力関数 $\phi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ 及び写像関数 $\omega(\zeta)$ を用いて外力境界条件式は、

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\zeta)} = i \int (P_x + iP_y) ds \quad (3)$$

と表される。dilatation を表す複素応力関数[2]は

$$\phi_0(z) = 0, \quad \psi_0(z) = -\frac{A}{z - z_0}, \quad \phi_1(\zeta) = 0, \quad \psi_1(\zeta) = -\frac{A}{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)} \approx -\frac{A}{\omega'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0)} \quad (4)$$

であり、 z_0 は特異点の座標、 A は dilatation の大きさを表す実数である。dilatation を r, θ 座標系の原点に置くと応力、変位はそれぞれ

$$\sigma_r = -\frac{A}{r^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{A}{r^2}, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_r = \frac{A}{2Gr}, \quad u_\theta = 0 \quad (5)$$

と得られる。上式より式(4)は $z = z_0$ で膨張変位 u_r が与えら

れた場合を表わす。求める複素応力関数 $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ を上式の

$\phi_1(\zeta), \psi_1(\zeta)$ と複素応力関数 $\phi_2(\zeta), \psi_2(\zeta)$ の和、即ち

$$\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta) \quad (6)$$

として表す。

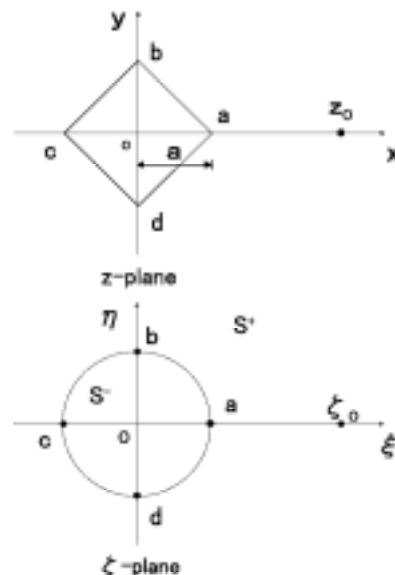


図1 矩形孔を有する無限領域と単位円

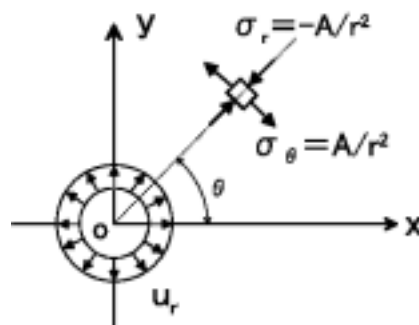


図2 dilatation によって発生する応力成分

キーワード 複素応力関数、写像関数、膨張、収縮、dilatation、グリーン関数

連絡先 名古屋工業大学 〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町 TEL 052(732)2111

境界条件を満足するように $\phi_2(\zeta), \psi_2(\zeta)$ を決める。一般性を失うことなく $p_x = p_y = 0$ として解析接続の定理より、複素応力関数 $\psi_2(\zeta)$ が単位円外で正則になるように $\phi_2(\zeta)$ を決定すると最終的に

$$\phi_2(\zeta) = \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A_k B_k}}{(\zeta - \zeta_k)} - \frac{A}{\omega'(\zeta_0)} \cdot \frac{\zeta_0'^2}{\zeta - \zeta_0'} \quad \text{但し} \quad A_k = \phi_2'(\zeta_k') \quad B_k = E_k \sqrt{\omega'(\zeta_k')} \quad (7)$$

が得られる。円孔の場合の写像関数は式(2)より $E_k = 0$ として得られる。したがって $\phi_2(\zeta)$ は右辺第2項のみで表わされる。

4. 解析結果

図3は矩形孔と円孔の境界上の応力分布(case1)、図4は円孔の場合において膨張点をx軸方向に移動した際の応力集中点(a点)の変化(case2)、図5は膨張点が原点を中心に θ 方向に回転移動した際の応力集中点(a点、c点)の応力 σ_θ の変化を(case3)表す。

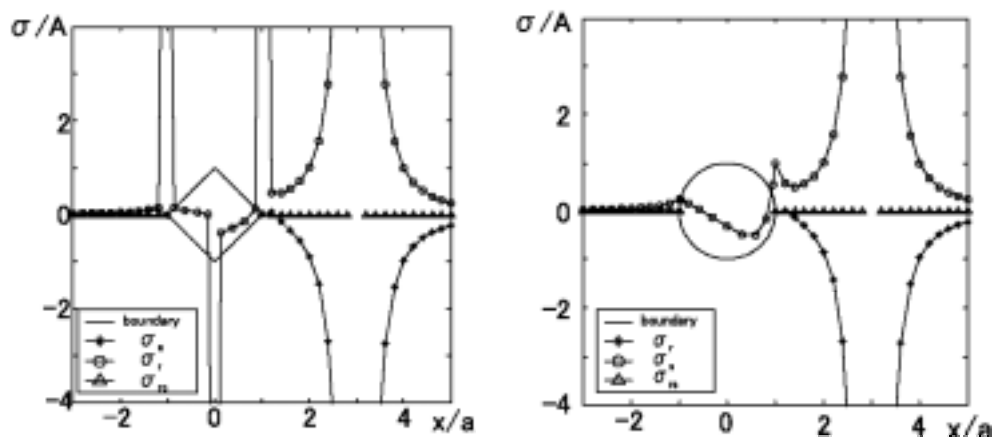


図3 矩形孔と円孔の境界上の応力分布

case1 は $z_0=3$ に膨張点が存在する場合の例である。自由境界上の σ_r 、 σ_{rs} は0となり境界条件をみたしている。矩形孔の隅角部で応力集中がみられる。a点、c点では引張応力、b点、d点では圧縮応力となる。

case2 では膨張点の位置 $x/a=1.0$ では σ_s は無窮大をとる。a点と膨張点の距離が大きくなると σ_s はx軸に漸近するように減少していく。 $x/a=1.0 \sim 2.0$ の間で特に変化量大きい。

case3 では対称により当然のことながら $\theta=90^\circ$ においてa点、c点の σ_s は同じ値を、また $\theta=0^\circ$ 、 $\theta=180^\circ$ においてa点、c点では逆の値を示す。

5. まとめ

本論文では膨張点の作用する任意形状孔を有する無限領域に対する応力関数(Green's functions)を導いて応力解析を行った。解析形状や孔と膨張点の距離を変えて応力分布とその変化の様子を調べた。写像関数を変えることで任意形状の孔に対して応力解析を行うことができる。この解の応用として膨張性、収縮性を有する介在物の存在する不均質材の応力解析のモデル化等を考えている。

参考文献

- [1] K.Yoshikawa.; N.Hasebe.: **Green's function for a heat source in an infinite region with an arbitrary shaped hole.** Journal of Applied Mechanics,1999,Vol.66, pp204-209.
- [2] X.Zhang.; N.Hasebe.: **Basic singular solutions for a cracked circular hole in an infinite medium.** Archive Applied Mechanics, 63 ,1993, pp.505-512

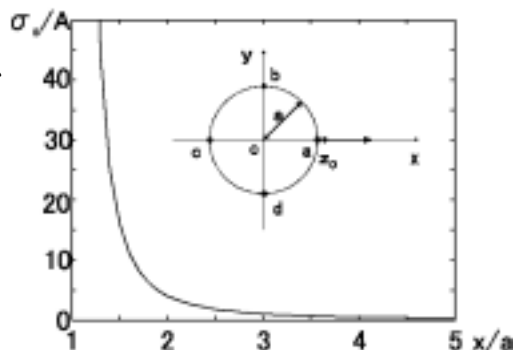


図4 膨張点がx方向移動した際のa点の応力変化

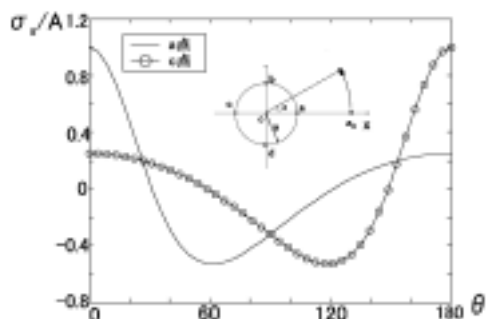


図5 膨張点が θ 方向移動した際の応力変化の比較