

面内・面外荷重下での自由または固定境界の任意形状孔を有する 弾性体および粘弾性体の解析

山梨大学大学院

○清水 忠明

山梨大学大学院

正会員

平島 健一

山梨大学大学院

正会員

鈴木 拓雄

1. 緒言

材料中に孔を有する問題を数値手法を用いずに解析することは、これまでも行われてきた。しかしながら、実際のトンネル等の地下構造物の解析に応用する場合、その断面形状は楕円形でない場合があり、また、力学特性を弾性体でない場合が多い。

本論文では、任意形状孔を有する媒体問題に対し複素変数法を用いた弾性厳密解の提示と弾性体・粘弾性体の間に成立する対応原理を利用して、孔周辺に発生する時間変化に伴う応力、変位を簡便かつ厳密に得られるようにすることを目的としている。

2. 応力・変位を求める公式

まず、孔が存在する断面の座標面の孔縁およびその外部を複素変数 $z (= x + iy)$ で表し、これを次式のように ζ -平面内の単位円およびその外部に変換する写像関数 $\omega(\zeta)$ を考える。

$$z = x + iy \equiv \omega(\zeta) = \alpha_0 \zeta + \sum_{m=1}^M (\alpha_m + i\beta_m) \zeta^{-m}. \quad (1)$$

2.1 面内問題

xy 平面内の応力 $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$ および変位 u', v' は複素解析関数 $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$ を用いて、一般に次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x + \sigma'_y &= 4 \operatorname{Re}[\Phi'_1(z)] \\ \sigma'_y - \sigma'_x + 2i\tau'_{xy} &= 2\{\bar{z}\Phi''_1(z) + \Phi'_2(z)\} \\ 2G(u' - iv') &= \kappa \bar{\Phi}_1(z) - \bar{z}\Phi'_1(z) - \Phi_2(z). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 $\Phi_k(z)$ ($k=1,2$) を決定すれば、必要な力学量が求められることになる。これらの関数は、孔縁での応力が与えられるような問題、例えば、無限遠での一定の面内応力成分 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ が作用するような図1(a)の問題を考える。このとき図1(b),(c)のように分解して考えれば、図1(c)の状態に対し、孔の境界において自由または固定境界条件式を満たすようにすればよい。

上式で求められる応力・変位は図1(c)の状態に対するものであり、それらに孔が存在状態での応力 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ および変位 u^∞, v^∞ を重ね合わせれば最終的に求めるべき図1(a)の状態の応力・変位が得られる。

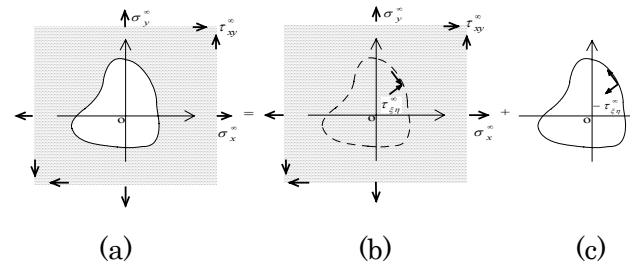


図1 重ね合わせの原理

2.2 面外問題

等方性体に対応する応力、変位成分は、複素関数 $\Phi_3(z)$ を用いて次式で与えられる。

$$\tau'_{yz} + i\tau'_{xz} = -2\Phi'_3(z), \quad w' = -\frac{2}{G} \operatorname{Im}[\Phi_3(z)] \quad (3)$$

ここで、面内問題と同様に自由および固定境界について境界条件式を満たすようにすればよい。また、上記の結果は、孔縁に応力成分 $-\tau_{xz}^\infty$ および $-\tau_{yz}^\infty$ が作用した場合、もしくは考えている問題の孔縁に生じる変位の反対符号の量が作用するものであるから、柱体の無限遠より一様な面外せん断荷重 τ_{xz}^∞ および τ_{yz}^∞ が作用する場合の応力・変位は、式(3)で計算した結果に、それぞれ $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$ および w^∞ を加え合わせたもので表されることになる。

2.3 面外方向の直応力の作用問題

σ_z^∞ が作用する場合を考える。等方性体における応力成分 σ_z^∞ と、ひずみ成分 $\varepsilon_x^\infty, \varepsilon_y^\infty$ との間には構成関係式から次式が成立する。

$$\varepsilon_x^\infty = \varepsilon_y^\infty = -\frac{\nu}{E} \sigma_z^\infty. \quad (4)$$

なお、孔が存在しない場合の無限媒体の変位 u^∞, v^∞ は次式で求められる。

キーワード 任意形状孔, 粘弾性問題, 面内・面外問題

連絡先 〒400-8511 山梨県甲府市武田 4-3-11 山梨大学工学研究科 平嶋研究室

$$\left. \begin{aligned} u^\infty &= -\frac{\nu}{E} \sigma_z^\infty x - \tilde{\omega} y + u_0, & v^\infty &= -\frac{\nu}{E} \sigma_z^\infty y - \tilde{\omega} x + v_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

したがって、 σ_z^∞ が作用する問題は一種の面内問題として考えることができる。

固定境界については、無限遠より面外直応力 σ_z^∞ が作用した場合、任意形状の孔縁に生じる変位の反対符号の量が作用する場合に対して考えればよい。この過程において求められる変位は孔縁に生じる変位の反対符号の量が作用する場合のものであるから、固定境界に面外直応力 σ_z^∞ が作用する場合の変位は、第2・1節で計算した結果に、それぞれ u^∞, v^∞ を加えたもので表されることになる。

3. 粘弾性問題への適用

次に、粘弾性解を求めるためには、粘弾性体の解析解は弾性解をラプラス逆変換したものと等しいという対応原理を適用する。つまり、対象とする問題の弾性厳密解に現れるせん断弾性係数 G または弾性係数 E 、およびポアソン比 ν は各々の粘弾性モデルに従った適切な置き換えを行い、ラプラス逆変換をすることによって粘弾性解に対する厳密解を導出することができる。

ところで粘弾性問題に対する解析解を導出するためには、あらかじめ粘弾性モデルを決定する必要がある。本研究では偏差成分および体積成分に対し、共に図2に示す Burgers モデルを採用した。

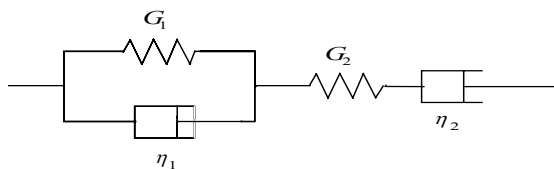


図2 Burgers Model

4. 数値計算例

ここでは、トンネル形状断面に下式のような三次元的な外荷重応力が作用した場合のトンネル形状断面の孔周縁の応力を示す。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^\infty &= -0.387 \text{ GPa}, & \sigma_y^\infty &= -0.813 \text{ GPa}, \\ \sigma_z^\infty &= -0.384 \text{ GPa}, & \tau_{xy}^\infty &= -0.204 \text{ GPa}, \\ \tau_{yz}^\infty &= -0.253 \text{ GPa}, & \tau_{xz}^\infty &= -0.055 \text{ GPa}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

図3はトンネル形状断面に三次元的な外荷重応力が作用した場合のトンネル形状断面の自由境界での孔周縁の応力 $\sigma_\eta, \tau_{\eta z}$ を示したものである。これより、応力状態は初期地山主応力の傾き、大きさおよび孔の形状に大きく影

響されることが示されている。特に、隅角部周辺において応力集中が発生している。また、自由境界のこの問題では応力は時間経過に関係なく一定の分布形となる。なおもちろん、孔縁のみならず孔周辺の主応力や変位分布も容易に計算できるが、紙面の都合上ここでは省略する。

図4はトンネル形状断面に三次元的な外荷重応力が作用した場合の固定境界での孔周縁の応力 $\sigma_\xi, \tau_{\xi z}$ を示したものである。これは図3の自由境界では共に零応力となるものであるが、固定境界では自由境界の場合と同様、隅角部において大きな応力が発生しているのがわかる。また、固定境界のこの問題では面内応力は時間経過に伴って減少するが、面外応力は時間経過に関係なく一定の分布形となる。

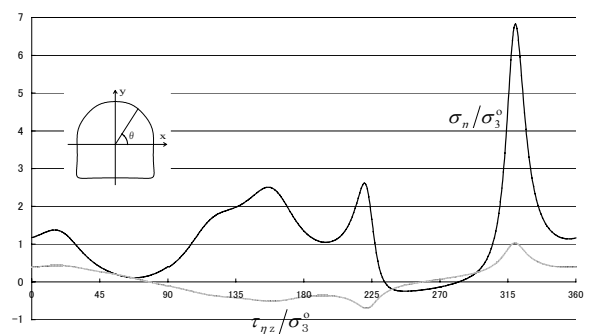


図3 一般的地山応力の作用下での自由境界の孔周縁の応力 $\sigma_\eta, \tau_{\eta z}$ の分布

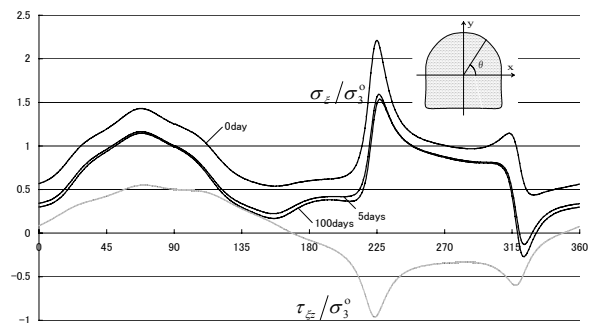


図4 一般的地山応力の作用下での固定境界の孔周縁の応力 $\sigma_\xi, \tau_{\xi z}$ の分布

5. 結言

本研究では、任意形状孔を有する等方性粘弾性体を対象として、無限遠からの面内および面外荷重問題における応力・変位を求めるのに必要な応力関数を決定し、任意形状孔の境界が自由または固定(剛体)境界となった場合の特別な問題に対する解析解を導出した。また、材料の特性を考慮する差異、その力学挙動を表現する様々な型の粘弾性モデルがあるが、ここではより一般的な Burgers モデルを採用した。