浸透流を受ける無限盤中の円孔から発生したクラックの解析

(株) 日立システムアンドサービス　大松　紀夫
名古屋工業大学　学生員　竹野　愛
○ 名古屋工業大学　正会員　長谷部　宣男
名古屋工業大学　正会員　王　険峰

1　序論

本研究では，多孔質体の材料に浸透流が作用した場合の外力境界値問題の理論解を誘導する．無限盤中の任意形状の孔を解析するために，分数式の和の形で表される有理写像関数と複素変数法を用い，複素応力関数を誘導し，その関数より応力分布，応力拡大係数等を調べる．

2　有理写像関数

図1に示す解析形状（円孔からクラックの発生した形状）の外部領域を単位円外に写像する次式で表わされる有理写像関数を用いて解析する[1, 2]．

$$z=\omega(\zeta)=E_{\mathrm{c}}+E_0\zeta+\frac{E_0}{2}\frac{1}{\zeta}+\sum_{\mathrm{K}=1}^{24}\frac{E_{\mathrm{K}}}{\zeta_{\mathrm{K}}-\zeta}\tag{1}$$

ここに $E_{\mathrm{c}}, E_0, E_{\mathrm{K}}$ は一般に複素定数である．極 ζ_{K} は単位円内部に存在する．

3　浸透流解析

浸透流の強さは，複素浸透流ポテンシャル $F(\zeta)$ と有理写像関数 $\omega(\zeta)$ を用いて次のように与えられる[3]．

$$u_x-iv_y=f'(z)=F'(\zeta)/\omega'(\zeta)\tag{2}$$

また，境界条件式は次式で与えられる．

$$F(\sigma)-\overline{F(\sigma)}=2i\int v_n ds\tag{3}$$

境界を通して解析形状孔内部には浸透流は通らない条件（止水）を用いると，境界上で速度の法線方向成分 $v_n=0$ である．よって，式(3)は次のようになる．

$$F(\sigma)-\overline{F(\sigma)}=0\tag{4}$$

ここで複素浸透流ポテンシャル $F(\zeta)$ は次式のように与える．

$$F(\zeta)=F_1(\zeta)+F_2(\zeta)\tag{5}$$

ここに，遠方の一様浸透流の条件より

$F_2(\zeta)=qe^{-i\theta}\omega(\zeta)$ である．

式(4)に式(5)およびを代入して，Cauchy積分を行うと，$F(\zeta)$ は次式のように誘導される．

$$F(\zeta)=q\left(\frac{\overline{\mathrm{E}_0}}{\zeta}e^{i\theta}+\mathrm{E_c}e^{-i\theta}+\mathrm{E}_0\zeta e^{-i\theta}\right)\tag{6}$$

よって，浸透流の強さは次式で表される．

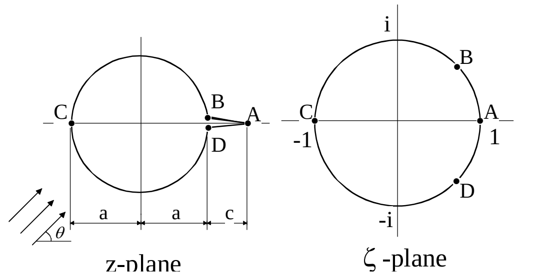

図1　解析形状と単位円

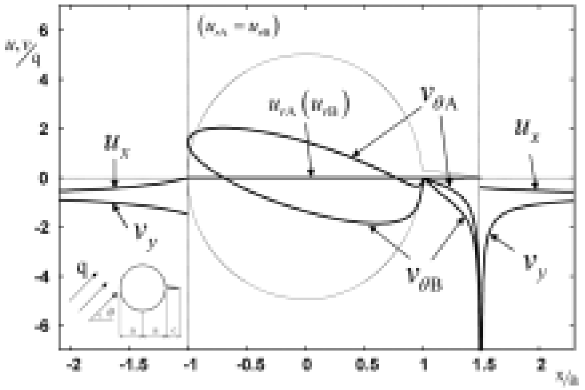

図2　x 軸上及び境界上での浸透流分布

$(\theta=90°, c/a=0.5)$

$$u_x-iv_y=\frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}=\frac{q\left(\mathrm{E}_0e^{-i\theta}-\dfrac{\overline{\mathrm{E}_0}}{\zeta^2}e^{i\theta}\right)}{\omega'(\zeta)}\tag{7}$$

図2はx軸および境界上での浸透流の強さ分布を示す．浸透流の方向は軸に対してθ＝90°である．v_θ は境界上で反時計回りを正の向きとしている．また，図中の添字A,Bはそれぞれ，解析形状の x 軸より上の境界，x 軸より下の境界を表している．

4　応力解析

次に浸透流の釣り合い方程式，ひずみの適合条件式を使うことにより応力関数Fは次のように求まる[4]．

$$F=\frac{1}{2}\left[\bar{z}\varphi(z)+z\overline{\varphi(z)}+\int\psi(z)+\int\overline{\psi(z)}\right]+\frac{1}{8}\left(\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\right)\phi\rho\left(f(z)\cdot\overline{f(z)}\right)\tag{8}$$

キーワード　浸透流，写像関数，外力境界値問題，応力拡大係数，多孔質体,物体力
連絡先　〒466-8555　名古屋市昭和区御器所町　名古屋工業大学　社開開発工学科　Tel.052-735-5482

また，応力境界条件式は次式のように表わされる．

$$\Phi(\sigma)+\omega(\sigma)\frac{\overline{\Phi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}+\overline{\Psi(\sigma)}+$$

$$\left(\frac{\rho\phi}{4}\left(\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\right)-\frac{\rho\phi}{2}\right)\left(F(\sigma)\cdot\frac{\overline{F'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\right)=i(\mathrm{X}+i\mathrm{Y}) \quad (9)$$

ここで，σはζ-planeにおける単位円上の点を表す．X,Yは，境界上で作用する外力で，一般性を失うことなく孔の境界上で外力が0の場合を考える．

式(9)に対してCauchy積分を行うと，応力関数Φ(ζ)は次のように求まる．

$$\Phi(\zeta)=-\sum_{\mathrm{K}=1}^{24}\frac{\mathrm{B_K}\overline{\mathrm{A_K}}}{\zeta_\mathrm{K}-\zeta}-\left(\frac{\rho\phi}{4}\left(\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\right)-\frac{\rho\phi}{2}\right)\frac{q^2\overline{\mathrm{E_0}}e^{2i\theta}}{\zeta} \quad (10)$$

ここで，$\mathrm{B_K}=\mathrm{E_K}\Big/\overline{\omega'(\zeta_\mathrm{K}')}$，$\overline{\mathrm{A_K}}=\overline{\Phi'(\zeta_\mathrm{K}')}$とおいている．また，解析接続の条件より，応力関数$\Psi(\zeta)$は次式で表される．

$$\Psi(\zeta)=-\bar{\Phi}\left(1/\zeta\right)-\bar{\omega}\left(1/\zeta\right)\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}-$$

$$\left(\frac{\rho\phi}{4}\left(\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\right)-\frac{\rho\phi}{2}\right)\left(\bar{F}\left(1/\zeta\right)\cdot\frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right) \quad (11)$$

図3はx軸および境界上での応力分布を示す．浸透流の方向はx軸に対してθ=90°である．$\sigma_r,\sigma_\theta,\tau_{r\theta}$はそれぞれ境界上での法線方向応力，接線方向応力，せん断方向応力を示している．応力値はせん断応力を除いて引張を正，圧縮を負，せん断応力$\tau_{r\theta}$は反時計回りを正としている．また図中の添字A,Bはそれぞれ，解析形状のx軸より上の境界，x軸より下の境界を表している．

5　応力拡大係数

クラック先端での応力拡大係数$K_\mathrm{I},K_\mathrm{II}$は複素応力関数Φ(ζ)および写像関数ω(ζ)を用いて次式で得られる．

$$K_\mathrm{I}-iK_\mathrm{II}=2\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\lambda}{2}}\frac{\Phi'(\zeta_0)}{\sqrt{\omega''(\zeta_0)}} \quad (12)$$

また，上式を無次元化した応力拡大係数$F_\mathrm{I},F_\mathrm{II}$を次式のように定義する．

$$F_\mathrm{I}-iF_\mathrm{II}=\frac{1}{q^2\mathrm{C}}\frac{K_\mathrm{I}+iK_\mathrm{II}}{\sqrt{\pi\left(\dfrac{2a+c}{2}\right)}} \quad (13)$$

但し，上式のCは$\left(\frac{\rho\phi}{4}\left(\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\right)-\frac{\rho\phi}{2}\right)$である．

図4は，θ=90°のクラック長を変化させた場合のクラック先端Zc点での応力拡大係数を示す．

6　結論

一様浸透流が作用する無限盤中の円孔から発生したクラックの外力境界値問題の解析を行った．この解は解析的に得られ，写像関数の表す形状に対して厳密である．写像関数を変えることにより任意形状孔の場合の解析も行える．応力分布（図3）でクラックの先端は負の値（圧縮力）であるが，応力拡大係数（図4）のそれは正の値（引張力）となっている．この理由は，応力成分の式において，別の特異性を含む項があり，それによるものである．そのため，図3と図4の両者がクラック先端の符号が異なる結果になったと考えられる．今後その項のクラック先端の特異性を調べたい．

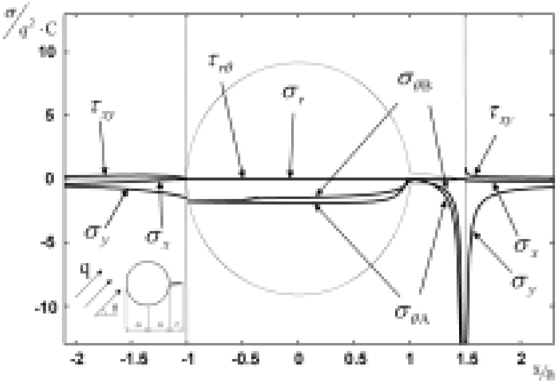

図3　x軸上及び境界上での応力分布
$(\theta=90°, c/a=0.5)$

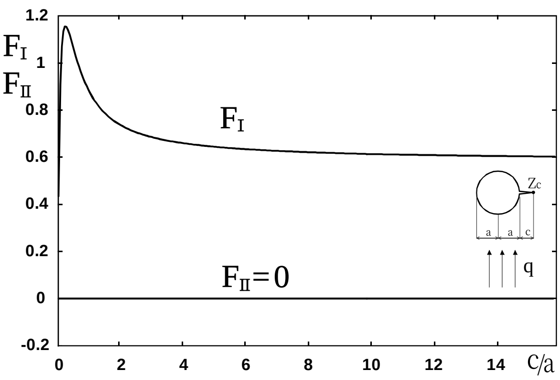

図４　クラック先端Zc点での無次元化した応力拡大係数$(\theta=90°)$

参考文献　[1]N.Hasebe et.al(1988) J.Thermal Stresses,11,381-391
[2]N.Hasebe & Y.Z.Chen(1996) Int.J.Fracture,77,351-366
[3]今井功(1979) 等角写像とその応力,岩波書店
[4]W.フリューゲ(1979) テンソル解析と連続体力学,ブレイン図書