面外せん断荷重下での任意層数の楕円形介在物を有する等方性圧電弾性体の解析理論

山梨大学大学院　　　　　○佐々木　徹
山梨大学大学院　正会員　　鈴木　拓雄
群馬高専　　　　正会員　　木村　清和
山梨大学大学院　正会員　　平島　健一

１．緒言

圧電材料は電気−力学変換デバイスとして有用な材料でありセンサーやアクチュエーターとして多方面にわたる利用が期待されている．また，より効率の良い機能性をもたせるために圧電物質や弾性体を積層させることが試みられている．そのためには，積層化された圧電弾性体に力学的・電気的負荷が作用した場合の各層の力学的・電気的物理量を理論解析的に把握することが重要である．

本研究においては図 1 に示すように，奥行き方向に断面形状の変化のない等方性圧電弾性媒体内に，物性値の異なる圧電弾性体で同一の共焦点を有する楕円形介在物が多数存在し，無限遠より面外方向に一様な力学的荷重および面内方向に一様な電気的荷重が作用する問題の解析解を閉じた型で導き，いくつかの数値計算例を示す．

２．解析手法

2.1　基礎関係式と基本解

・力学的釣合式と電気変位に対するガウスの法則

$$\tau_{xz,x}+\tau_{yz,y}=0,\quad D_{x,x}+D_{y,y}=0. \qquad (1)$$

・圧電効果を考慮した構成式

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz}&=C_{44}u_{z,x}+e_{15}\varphi_{,x},\quad \tau_{yz}=C_{44}u_{z,y}+e_{15}\varphi_{,y},\\ D_x&=e_{15}u_{z,x}-\varepsilon_{11}\varphi_{,x},\quad D_y=e_{15}u_{z,y}-\varepsilon_{11}\varphi_{,y}.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ここに，C_{44} はせん断弾性定数，ε_{11} は誘電率，e_{15} は圧電定数である．

・幾何式および電場 E と電気ポテンシャル φ の関係

$$\gamma_{xz}=u_{z,x},\ \gamma_{yz}=u_{z,y},\ E_x=\varphi_{,x},\ E_y=\varphi_{,y}. \qquad (3)$$

以上に示した式を組み合わせることにより，次の調和方程式が得られる．

$$\nabla^2 u_z=0,\ \nabla^2\varphi=0,\ \nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2. \qquad (4)$$

ここで，複素平面を $z=x+iy$ で表し，この $xy-$平面を図 2 のように $\zeta-$平面に写像する関数 $\omega(\zeta)$ を次式のように設定する．

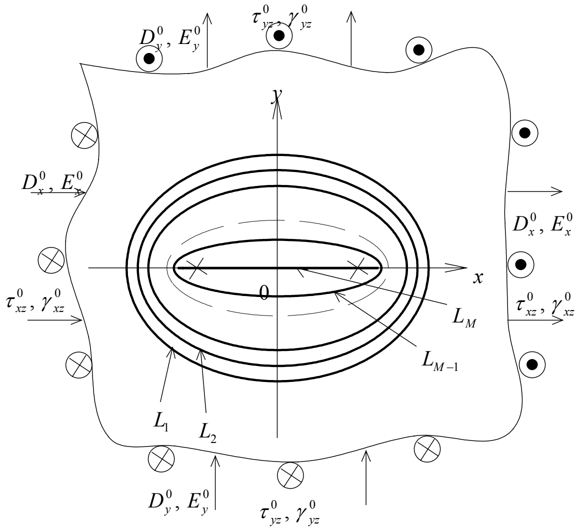

図 1　多層楕円形介在物を有する媒体に対する解析モデル

$$\omega(\zeta)=R_0(\zeta+m/\zeta) \qquad (5)$$

上式中の係数 R_0 および m は次式で与えられる．

$$R_0=(a_1+b_1)/2,\quad m=(a_1-b_1)/(a_1+b_1). \qquad (6)$$

ここで，式(4)に示した支配方程式を解くための領域における 2 つの複素ポテンシャル関数 $U_n(z)$,$\Phi_n(z)$ を導入する．

$$\left.\begin{aligned}u_z^n&=\mathrm{Im}[U_n(z)]=-i\{U_n(z)-\overline{U_n(z)}\}/2,\\ \varphi^n&=\mathrm{Im}[\Phi_n(z)]=-i\{\Phi_n(z)-\overline{\Phi_n(z)}\}/2.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

上式と基礎関係式より，応力，ひずみ，電気変位および電場は次式で求められる．

$$\left.\begin{aligned}\tau_{\eta z}^n+i\tau_{\xi z}^n&=(\tau_{yz}^n+i\tau_{xz}^n)e^{i\varphi}=\{C_{44}^nU_n'(z)+e_{15}^n\Phi_n'(z)\}e^{i\varphi},\\ \gamma_{\eta z}^n+i\gamma_{\xi z}^n&=(\gamma_{yz}^n+i\gamma_{xz}^n)e^{i\varphi}=U_n'(z)e^{i\varphi},\\ D_\eta^n+iD_\xi^n&=(D_y^n+iD_x^n)e^{i\varphi}=\{e_{15}^nU_n'(z)-\varepsilon_{11}^n\Phi_n'(z)\}e^{i\varphi},\\ E_\eta^n+iE_\xi^n&=(E_y^n+iE_x^n)e^{i\varphi}=-\Phi_n'(z)e^{i\varphi}.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

2.2 境界条件

境界 $L_1, L_2, ..., L_{M-1}$ 上の境界条件は，①力学的変位，②合応力，③電気ポテンシャルおよび④合電気変位に対して次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}&①u_z^n=u_z^{n+1},②P_z^n=P_z^{n+1},③\varphi^n=\varphi^{n+1},④P_E^n=P_E^{n+1},\\ &\qquad on\ L_n(n=1,2,...,M-1).\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

この境界条件を満足するように，鏡像原理を用い

キーワード　圧電材料，多層問題，等方性，楕円形介在物，面外力学的荷重
連絡先　〒400-8511　山梨県甲府市武田 4-3-11　山梨大学工学研究科自然機能開発専攻　ＴＥＬ055-220-8532

た解析接続法により定式化を行う．

ⅰ)境界 L_n の外側領域から内側領域に向かって解析接続法により一般化した関数

$$\left.\begin{aligned} U^-_{n+1}(\zeta) &= P^n_{11}U^-_n(\zeta) - P^n_{12}\overline{U^-_n}(\rho_n^2/\zeta) \\ &\quad + P^n_{21}\Phi^-_n(\zeta) - P^n_{22}\overline{\Phi^-_n}(\rho_n^2/\zeta), \\ \Phi^-_{n+1}(\zeta) &= Q^n_{11}U^-_n(\zeta) + Q^n_{12}\overline{U^-_n}(\rho_n^2/\zeta) \\ &\quad + Q^n_{21}\Phi^-_n(\zeta) + Q^n_{22}\overline{\Phi^-_n}(\rho_n^2/\zeta)\}. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

ⅱ)境界 L_n の内側領域から外側領域に向かって解析接続法により一般化した関数

$$\left.\begin{aligned} U^+_n(\zeta) &= V^n_{11}U^+_{n+1}(\zeta) + V^n_{12}\overline{U^+_{n+1}}(\rho_n^2/\zeta) \\ &\quad + V^n_{21}\Phi^+_{n+1}(\zeta) + V^n_{22}\overline{\Phi^+_{n+1}}(\rho_n^2/\zeta), \\ \Phi^+_n(\zeta) &= W^n_{11}U^+_{n+1}(\zeta) + W^n_{12}\overline{U^+_{n+1}}(\rho_n^2/\zeta) \\ &\quad + W^n_{21}\Phi^+_{n+1}(\zeta) + W^n_{22}\overline{\Phi^+_{n+1}}(\rho_n^2/\zeta). \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (11)$$

さらに，最も内側の共焦点間の境界 L_M での解析接続は，この共焦点上に沿う直上および直下での関数の連続性の要請から，次式で表される．

$$U^+_M(\zeta) = U^-_M(m/\zeta),\ \ \Phi^+_M(\zeta) = \Phi^-_M(m/\zeta). \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

以上より，各領域の複素ポテンシャル関数 $U(\zeta), \Phi(\zeta)\ (n=1,2,...,M)$ は上式までの解析接続法によって求められた，それぞれ２種類の関数 U^-_n，Φ^-_n および U^+_n，Φ^+_n を重ね合わせることにより，最終的に次式のように求められる．

$$\left.\begin{aligned} U_n(\zeta) &= U^-_n(\zeta) + U^+_n(\zeta) \\ &= R_0\{(\alpha^n_{11}A + \alpha^n_{12}\overline{A} + \kappa^n_{11}B + \kappa^n_{12}\overline{B})\zeta \\ &\quad + (\kappa^n_{21}A + \kappa^n_{22}\overline{A} + \alpha^n_{21}B + \alpha^n_{22}\overline{B})/\zeta\}, \\ \Phi_n(\zeta) &= \Phi^-_n(\zeta) + \Phi^+_n(\zeta) \\ &= R_0\{(\beta^n_{11}A + \beta^n_{12}\overline{A} + \mu^n_{11}B + \mu^n_{12}\overline{B})\zeta \\ &\quad + (\mu^n_{21}A + \mu^n_{22}\overline{A} + \beta^n_{21}B + \beta^n_{22}\overline{B})/\zeta\}, \\ &\qquad (n = 1,2,...,M). \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (12)$$

なお，上式中の $\alpha^n_{ij}, \beta^n_{ij}, \kappa^n_{ij}, \mu^n_{ij}\ (i,j=1,2)$ はせん断係数 C_{44}，圧電定数 e_{15}，誘電率 ε_{11} および楕円形状パラメータ a_n, b_n によって定められる実定数である．

３．数値計算例

3.1 層数を増減させた場合の各物理量の変化

図 2 では圧電弾性媒体中の楕円形介在物の物性値が連続的に変化する場合を想定し数値計算を行ったものである．

3.2 介在物に局所的な柔な層もしくは剛な層が存在する場合の各物理量の変化

図 3 では圧電弾性媒体中の楕円形介在物の物性値が局所的に変化する場合を想定し数値計算を行ったものである．

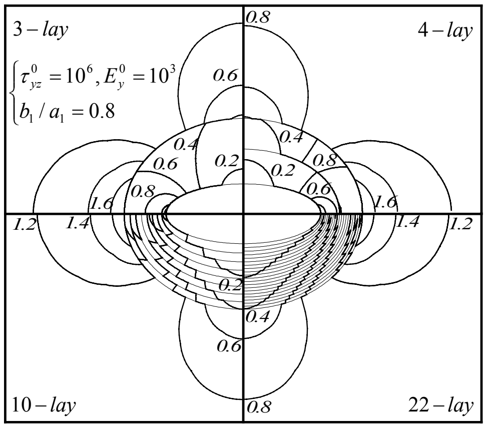

図２　層数の変化に伴う τ_{max}/τ^0_{yz} の等高線の変化

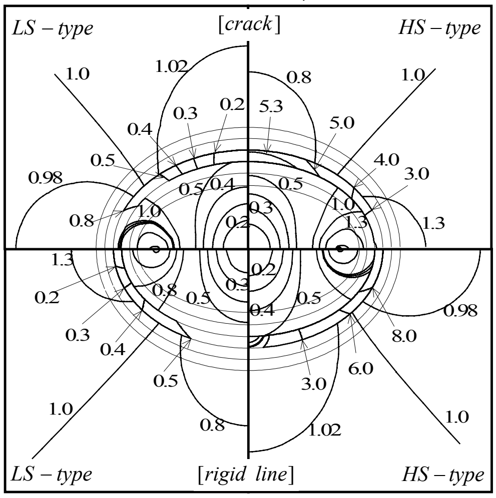

図３　直線境界 L_7 がクラックまたは剛体の場合に対する $\tau_{max}/\tau^\infty_{yz}$ または $\tau_{max}/\tau^\infty_{xz}$ の等高線図

４．結論

本研究では，遠方場での一様な面外の力学的負荷および面内の電気的負荷が作用する多層楕円形圧電弾性介在物を有する等方性圧電弾性媒体に対する解析解の提示を行うと共に，いくつかの数値計算を示した．ここで導かれた解析解は層数が数十ないし数百以上になってもなんら困難なく計算可能なものとなっている．なお，数値計算例の詳細な考察は講演会当日に発表するものとする．

参考文献

(1)鈴木・佐々木・木村・平島： 面外せん断荷重下での多層楕円形介在物を有する等方性圧電弾性体の解析理論，機論，(投稿中).

(2)鈴木・佐々木・木村・吉野： 面外せん断荷重下での多層円形介在物を有する等方性圧電弾性体の解析解とその計算例，機論，69-679A(2003).

(3)鈴木・佐々木・木村・平島：任意数の完全または不完全接合の多層楕円形介在物を有する等方性圧電弾性体の ModeⅢ型の応力拡大係数，機論，(投稿中)