

水平面内に曲率を有する曲線桁橋の剛性マトリックスの誘導

大同工業大学大学院 学生員 名木野晴暢

大同工業大学 都市環境デザイン学科 正員 水澤富作 事口壽男

1. まえがき 変位法は，分布荷重に対し，等価節点荷重として取り扱うため，複雑な荷重状態では解析が繁雑になる．また，水平面内に曲率を有する曲線部材での閉じた解における剛性マトリックスの定式化は，著者らが知る範囲では，誘導されていないように思われる．

本研究では，曲げと単純ねじりを受ける分布荷重載荷状態の曲線部材に関する剛性マトリックスを誘導する．曲線部材の基礎微分方程式より得られる閉じた解¹⁾から，数学的に誘導したものである．誘導された剛性マトリックスは，分布荷重項が剛性マトリックスの内部に組み込まれており，解析は，マトリクス演算のみで行われ，その有用性は高いと考える．計算例として，3 径間連続曲線 S 字橋を対象にし，伝達マトリクス法による結果¹⁾との解の比較を行っている．

2. 微分方程式の解

曲線部材の連成微分方程式とラプラス変換を用いて，**図-1**に示される曲げと単純ねじりを同時に受ける分布荷重載荷状態の曲線部材の剛性マトリックスを誘導する．曲線部材の基礎微分方程式は，次式のように，力の釣り合い式と変位量と断面力の関係式で与えられる．

$$dM/d\phi + T - S \cdot R = 0, dT/d\phi - M = 0, dS/d\phi + q \cdot R = 0 \tag{1}$$

$$d^2w/d\phi^2 - R \cdot \beta = -R^2 \cdot M/EI, d\beta/d\phi + (1/R) \cdot (dw/d\phi) = R \cdot T/GK \tag{2}$$

ここで， w ：たわみ， β ：断面回転角（ねじり角）， M ：曲げモーメント， T ：ねじりモーメント， S ：せん断力， ϕ ：中心角， R ：曲率半径，また EI ， GK はそれぞれせん断中心における曲げ剛性，純ねじり剛性であり，たわみ角 φ は次式で定義される． $\varphi = -(1/R) \cdot (dw/d\phi)$

式(1),(2)をラプラス変換して解を求め，**図-1**に示す変位法の符号に合わせて変形すれば，式(4)のように表される¹⁾．

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi \\ \beta \\ Y \\ M \\ T \\ 1 \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 1 & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_{17} \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & f_{24} & f_{25} & f_{26} & f_{27} \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & f_{34} & f_{35} & f_{36} & f_{37} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & f_{47} \\ 0 & 0 & 0 & f_{54} & -\cos\phi & \sin\phi & f_{57} \\ 0 & 0 & 0 & f_{64} & -\sin\phi & -\cos\phi & f_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \\ \beta \\ Y \\ M \\ T \\ 1 \end{Bmatrix}_i \tag{4}$$

$$\begin{Bmatrix} \{\delta_j\} \\ \{R_j\} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{11}] & [F_{12}] & [\Delta_\delta] \\ [F_{21}] & [F_{22}] & [\Delta_R] \\ [0] & [0] & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{R_i\} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

ここで，サフィックス i, j はそれぞれ材端を表す．ここでは， f_{ij} の詳細は割愛するが， f_{n7} ($n=1, \dots, 6$) は，分布荷重 q 及びトルクモーメント m が作用する時の荷重項である．

3. 剛性マトリックスの誘導

ここで， $\{\delta_j\} = \{w_j \ \varphi_j \ \beta_j\}^T$ ， $\{\delta_i\} = \{w_i \ \varphi_i \ \beta_i\}^T$ ， $\{R_j\} = \{Y_j \ M_j \ T_j\}^T$ ， $\{R_i\} = \{Y_i \ M_i \ T_i\}^T$ とおけば，式(4)は，式(5)で表される．

従って，式(5)より， $\{\delta_j\} = [F_{11}]\{\delta_i\} + [F_{12}]\{R_i\} + [\Delta_\delta] \cdot 1$ が得られる． $\{R_i\}$ について解けば，

$$\{R_i\} = -[F_{12}]^{-1}[F_{11}]\{\delta_i\} + [F_{12}]^{-1}\{\delta_j\} - [F_{12}]^{-1}[\Delta_\delta] = [K_{11}]\{\delta_i\} + [K_{12}]\{\delta_j\} + [K_{13}] \cdot 1$$

同様にして，

キーワード 曲線部材の剛性マトリックス，変位法，曲線桁橋

〒457-8532 名古屋市南区白水町 40 大同工業大学都市環境デザイン学科 TEL 052-612-5571

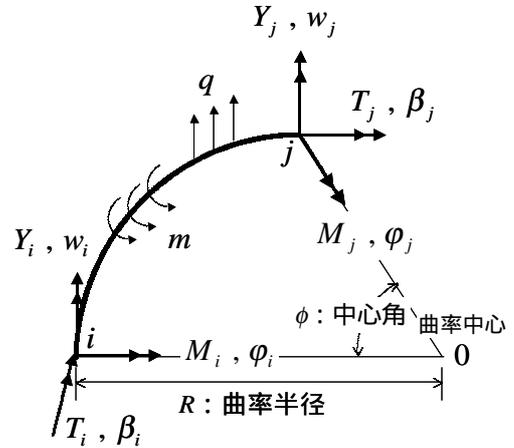


図-1 曲線部材と荷重,変位及び断面力

$$\{R_j\} = [F_{22}] [K_{11}] \{\delta_i\} + [F_{22}] [K_{12}] \{\delta_j\} + ([F_{22}] [K_{13}] + [\Delta_R]) = [K_{21}] \{\delta_i\} + [K_{22}] \{\delta_j\} + [K_{23}] \cdot 1$$

以上をマトリックス表示すると、次式の剛性方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \{R_i\} \\ \{R_j\} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [0] & [0] & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{\delta_j\} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{または, } \{F\} = [K] \{\Lambda\} \quad (6)$$

ここで、 $\{F\}$ は、外力ベクトル、 $[K]$ は、誘導された曲げと純ねじりを受ける剛性マトリックス、 $\{\Lambda\}$ は、未知量ベクトルである。式(7)で表される $[K]$ は、各要素 k_{lm} で構成され、それぞれ、式(8)で与えられる。ここに、 $\alpha = GK/EI$ 、 $\xi = (\phi^2 \cdot \alpha + \phi^2 - \phi \cdot \alpha \cdot \sin \phi + \phi \cdot \sin \phi + 4 \cdot \cos \phi - 4)$ 、 $\eta = (\alpha \cdot \sin \phi - \sin \phi + \phi \cdot \alpha + \phi)$ 、 $\zeta = \{4 \cdot (1 - \cos \phi)(\alpha \cdot \sin \phi - \sin \phi + \phi \cdot \alpha + \phi) + \phi \cdot (\alpha - 1)^2 \cdot \sin^2 \phi - \phi^3 \cdot (1 + \alpha)^2\}$ である。

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & -k_{11} & k_{12} & -k_{13} & k_{17} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & -k_{12} & k_{25} & k_{26} & k_{27} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & -k_{13} & -k_{26} & k_{36} & k_{37} \\ -k_{11} & -k_{12} & -k_{13} & k_{11} & -k_{12} & k_{13} & -k_{17} \\ k_{12} & k_{25} & -k_{26} & -k_{12} & k_{22} & -k_{23} & -k_{27} \\ -k_{13} & k_{26} & k_{36} & k_{13} & -k_{23} & k_{33} & -k_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= GK \cdot (\phi \cdot \alpha + \phi - \alpha \cdot \sin \phi + \sin \phi) / R^3 \cdot \xi \\ k_{12} &= 2 \cdot GK \cdot (1 - \cos \phi) / R^2 \cdot \xi \\ k_{13} &= -GK \cdot (\phi - \sin \phi)(\alpha + 1) / R^2 \cdot \xi \\ k_{22} &= -2 \cdot GK \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin \phi \cdot (2 \cdot \sin \phi + \phi \cdot \alpha \cdot \cos \phi - \phi \cdot \cos \phi) \\ -\phi^2 \cdot (\alpha + 1) \end{array} \right\} / R \cdot \xi \cdot \eta \\ k_{23} &= 2 \cdot GK \cdot (1 - \cos \phi)(\phi \cdot \alpha \cdot \cos \phi - \phi \cdot \cos \phi - 2 \cdot \phi \cdot \alpha \cdot \sin \phi + 3 \cdot \sin \phi) / R \cdot \xi \cdot \eta \\ k_{33} &= -GK \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin \phi \cdot (\alpha^2 \cdot \sin \phi + 2 \cdot \alpha \cdot \sin \phi + \sin \phi \\ -2 \cdot \phi \cdot \alpha \cdot \cos \phi + 2 \cdot \phi \cdot \cos \phi + 4 \cdot \phi \cdot \alpha \\ + 4 \cdot \phi \cdot \sin \phi + 8 \cdot \cos \phi \cdot (\cos \phi - 1) - \phi^2 \cdot (\alpha + 3)(\alpha + 1) \end{array} \right\} / R \cdot \xi \cdot \eta \\ k_{25} &= 2 \cdot GK \cdot \{(\alpha + 1) \cdot \phi^2 \cdot \cos \phi - \sin \phi \cdot (\phi \cdot \alpha - \phi + 2 \cdot \sin \phi)\} / R \cdot \xi \\ k_{26} &= 2 \cdot GK \cdot (\alpha + 1) \{ \phi \cdot (\phi \cdot \sin \phi + \cos \phi - 1) - \sin \phi \cdot (1 - \cos \phi) \} / R \cdot \xi \\ k_{36} &= GK \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \cos \phi \cdot (\phi^2 \cdot \alpha + \phi^2 - 4) - \sin^2 \phi \cdot (\alpha + 1)^2 \\ -2 \cdot (\alpha + 3) \cdot \phi \cdot \sin \phi + \phi^2 \cdot (\alpha + 1)^2 + 8 \end{array} \right\} / R \cdot \xi \\ k_{17} &= -q \cdot R \cdot \phi / 2 \\ k_{27} &= -q \cdot R^2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \phi^3 \cdot (\alpha + 1)(\cos \phi + \alpha + 2) \\ -\phi^2 \cdot \sin \phi \cdot (2 \cdot \alpha^2 + \alpha \cdot \cos \phi + 5 \cdot \alpha - \cos \phi + 1) \\ + \phi \cdot \{ \sin^2 \phi \cdot (\alpha^2 + 2 \cdot \alpha - 7) + 4 \cdot (\cos \phi - 1)(\alpha + 1) \} \\ -4 \cdot \sin \phi \cdot (\cos \phi - 1)(\alpha + 3) \end{array} \right\} / \xi \cdot \eta \\ k_{37} &= -q \cdot R^2 \cdot (\alpha + 1) \cdot \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \{ \phi \cdot \sin \phi \cdot (\cos \phi - 1)(\alpha - 2) - 4 \cdot (\cos \phi - 1)^2 \} \\ -\phi^4 \cdot (\alpha + 1) - 2 \cdot \phi^3 \cdot \sin \phi \\ -\phi^2 \cdot (4 \cdot \alpha \cdot \cos \phi + 8 \cdot \cos \phi - \alpha \cdot \sin^2 \phi + \sin^2 \phi - 4 \cdot \alpha - 8) \end{array} \right\} / 2 \cdot \xi \cdot \eta \end{aligned} \quad (8)$$

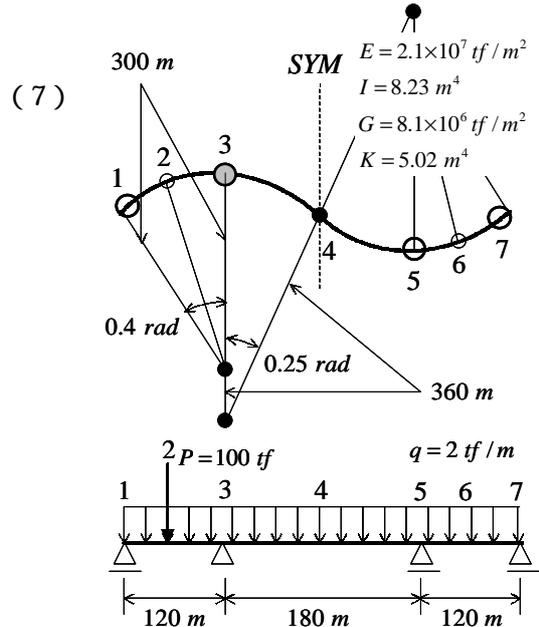


図-2 3径間連続曲線S字桁橋

4. 数値計算例及び考察

図-2に、数値計算例に用いた3径間連続曲線S字桁橋の平面図、側面図及び荷重状態を示す。節点は、各支点、集中荷重作用位置及び対称変曲点にとり、要素数は6分割としている。

表-1に数値計算結果を示す。また、比較のために中井らの伝達マトリックス法(TMM)の解¹⁾も示している。

表-1 未知量の精度比較(図-2モデル)

Amount of displacement and reaction	Multiplier	Method	Nodal point						
			1	2	3	4	5	6	7
deflection and [reaction]	$\times 10^{-2}$ [m] [$\times 10^{-2}$ [tf]]	Present	[1.207]	-2.341	[4.068]	-3.577	[3.306]	-0.818	[-0.819]
		TMM	[1.207]	-2.341	[4.068]	-3.577	[3.306]	-0.818	[-0.819]
Torsional angle and [Torsional moment]	$\times 10^{-4}$ [rad] [$\times 10^{-2}$ [tf·m]]	Present	[3.914]	-3.845	[-2.820]	0.624	[3.265]	1.346	[-1.775]
		TMM	[3.914]	-3.845	[-2.820]	0.624	[3.265]	1.346	[-1.775]
Deflection angle	$\times 10^{-4}$ [rad]	Present	-7.294	1.760	0.340	-0.662	2.105	-1.360	3.269
		TMM	-7.294	1.760	0.340	-0.662	2.105	-1.360	3.269

また、表中の【】は支点反力を表している。本手法による解は、伝達マトリックス法の解と一致している。

5. まとめ

本研究では、分布荷重載荷状態の曲線部材の剛性マトリックスを基礎微分方程式の閉じた解から、数学的に誘導した。また、従来の変位法のような等価節点荷重の概念は不要であり、すべて行列演算だけの統一的な解析が可能である。

謝辞：福井工業大学の中井博教授には、多大なご指摘を受けました。ここに厚く御礼申し上げます。

参考文献 1). 中井博, 事口壽男共著：伝達マトリックス法による鋼橋の解析, 森北出版, 1992.