Finite Point Method の一次元問題適用について

北海道大学工学部土木工学科　学生会員　○京田　康宏
北海道大学大学院工学研究科　正会員　蟹江　俊仁
北海道大学大学院工学研究科　学生会員　寺田　学

1. 研究目的

これまでメッシュを必要としない解析手法が数多く提案されてきたが，その中でも重み付き最小自乗法(Weighted Least Square Method，WLSM)と選点法を組み合わせた Finite Point Method(FPM)は積分格子も必要としないだけでなく，計算負荷が小さいという利点も有している．本研究では，FPM の妥当性を検証するために，Timoshenko 梁を取り上げ，その適用性について検証した．

2. WLSM と形状関数

領域 $x \in \Omega$ で定義される関数 $u = f(x)$ に対して，領域内の任意の評価点 x_k における関数 u は次式を用いて近似的に表されるものとする．

$$u(x_k) \cong \hat{u}(x_k) = \{\mathbf{p}(x_k)\}^T \{\boldsymbol{\alpha}(x_k)\} \tag{1}$$

ここに，$\hat{u}$ は近似解，$\mathbf{p}$ は基底関数ベクトル，m は基底関数の次数，$\boldsymbol{\alpha}$ は未定係数ベクトルである．ちなみに，$\{\mathbf{p}(x)\}^T = \{1, x, x^2, \cdots\}$，$\{\boldsymbol{\alpha}(x)\} = \{a_k, b_k, c_k, \cdots\}$ となる．また，WLSM では，次式で定義される評価関数 Π を最小にするように未定係数 α_i を決定する．

$$\Pi = \sum_{j=1}^{NP} \varphi(z_j)\left(u(x_k) - \{\mathbf{p}(x_k)\}^T \{\boldsymbol{\alpha}(x_k)\}\right)^2 \tag{2}$$

$$z_j = \frac{x_j - x_k}{\rho_k} \tag{3}$$

ここに，NP, x_j はそれぞれ評価点 x_k の近傍に位置する節点数, 節点座標, $\varphi(z)$ は重み関数である．また，ρ_k (サポート台)は重み関数の範囲を示しており，これを変化させることにより重み関数中に含まれる節点数 n も変化する．本解析においては，節点配置の疎密に関らず重み関数の範囲内に含まれる節点数 n が一定に保たれる可変式サポート台を用いる．また，本論文では基底関数 $\mathbf{p}$ 中の変数 x を ρ_k で正規化した(式(4)).

$$\xi = \frac{x - x_k}{\rho_i} \tag{4}$$

$$\{\mathbf{p}(\xi)\}^T = \{1, \xi, \xi^2, \cdots\} \tag{5}$$

正規化を行うことにより，解析領域が原点から大きく移動したり，座標 x が非常に小さい値になっても対称性を保持した安定的な形状関数が得られる．

ここで，

$$[\mathbf{P}] = \left[\{\mathbf{p}(\xi_1)\}, \{\mathbf{p}(\xi_2)\}, \cdots, \{\mathbf{p}(\xi_{NP})\}\right] \tag{5}$$

$$[\boldsymbol{\Phi}] = diag(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \cdots, \varphi(z_{NP})) \tag{6}$$

$$\{U\}^T = \{u(x_1), u(x_2), \cdots, u(x_{NP})\} \tag{7}$$

と表すと，式(2)は次のようになる．

$$\Pi = \left([\mathbf{P}]^T \{\boldsymbol{\alpha}\} - \{U\}\right)^T [\boldsymbol{\Phi}]\left([\mathbf{P}]^T \{\boldsymbol{\alpha}\} - \{U\}\right) \tag{8}$$

式(8)に最小化条件を付与すると，式(8)が得られる

$$\therefore \{\boldsymbol{\alpha}\} = \left[[\mathbf{P}][\boldsymbol{\Phi}][\mathbf{P}]^T\right]^{-1} [[\mathbf{P}][\boldsymbol{\Phi}]]\{U\} \tag{9}$$

また，式(1)と式(9)より，

$$\hat{u}(x_k) = \{\mathbf{p}(\xi_k)\}^T \left[[\mathbf{P}][\boldsymbol{\Phi}][\mathbf{P}]^T\right]^{-1} [[\mathbf{P}][\boldsymbol{\Phi}]]\{U\} \tag{10}$$

以上より，形状関数 N_k が得られる．

$$N_k = \{\mathbf{p}(\xi_k)\}^T \left[[\mathbf{P}][\boldsymbol{\Phi}][\mathbf{P}]^T\right]^{-1} [[\mathbf{P}][\boldsymbol{\Phi}]] \tag{11}$$

3. 選点法による支配方程式の正式化

一次元問題で微分方程式を以下のように定義する．

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ on } \Gamma_g, \quad \frac{du}{dx} = h \text{ on } \Gamma_h \tag{12}$$

式(12)はそれぞれ支配方程式，ディリクレ境界条件，ノイマン境界条件である．近似解 $\hat{u}(x_k)$ によって近似される未知関数 $u(x_k)$ に重み付き残差法を用いると，次式が得られる．

$$\int_\Omega \left(\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} - f\right) w d\Omega + (\hat{u} - g)\overline{w} + \left(\frac{d\hat{u}}{dx} - h\right)\overline{\overline{w}} = 0 \tag{13}$$

ここで，重み関数を $w = \overline{w} = \overline{\overline{w}} = \delta$ とする．δ は Dirac delta である．式(13)より式(14)が得られる．

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \tag{14}$$

$\mathbf{K}$ は剛性マトリックスであり，$\mathbf{K} \in \Re^{NP \times NP}$，$\mathbf{u} \in \Re^{NP \times 1}$，$\mathbf{F} \in \Re^{NP \times 1}$ となる．一般に剛性マトリックスの対称性は得られない．領域内の点を I，ディリクレ境界上の点を M，ノイマン境界上の点を N とすると，剛性マトリックスは次のようになる．

$$\mathbf{K}_{Ij} = \frac{\partial^2 N_j(x_I)}{\partial x^2}, \quad \mathbf{K}_{Mj} = N_j(x_M), \quad \mathbf{K}_{Nj} = \frac{\partial N_j(x_N)}{\partial x}, \quad j = 1, 2, \cdots, NP \tag{15}$$

キーワード　メシュフリー，Finite Point Method，重み付き最小自乗法，選点法
連絡先　〒063-8628　札幌市北区北 13 条西 8 丁目　北海道大学大学院　工学研究科

4. Timoshenko 梁への適用

(1) 可変式サポート台の有効性

本手法を Timoshenko 梁に適用する. 図 1 に示すような不連続な荷重が作用する問題の場合，不連続点付近の節点配置を密にすることで解の精度が向上する. このような場合における可変式サポート台の有効性を確認する. 解析条件は表 1 に示す通りである.

せん断係数 k	5/6
ポアソン比 ν	0.3
ヤング率 E	1
節点数 NP	9
近似次数 m	4

	ρ_k	節点配置
Case1	固定	均等配置
Case2	固定	中央部密
Case3	可変	中央部密

表 1 解析条件

均等な節点配置よりも密な節点配置の方が精度が良い. また，可変式サポート台を用いることで振動性状を示さなくなっていることが分かる.

$$\left.\begin{aligned} kGA\frac{d^2w}{dx^2}-kGA\frac{d\theta}{dx}&=-q(x)\\ kGA\frac{dw}{dx}+EI\frac{d^2\theta}{dx^2}-kGA\theta&=0\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

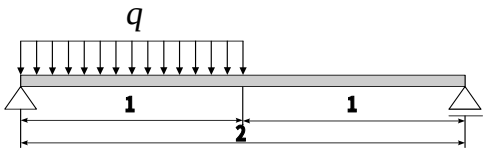

図 1 モデル図 1

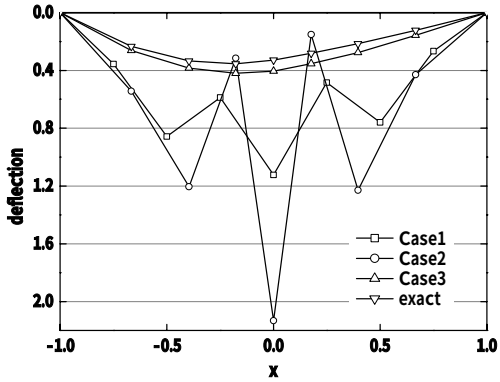

図 2 たわみの比較

(2) Timoshenko 梁の自由振動

ここでは，Tomoshenko 梁に本手法を適用する. 支配方程式は式(17)，解析モデルは図 3 である. 本解析では，単位体積質量 $\rho=1$，高さ $h=0.2$ の正方形断面として計算を行う. ちなみに固有振動数 ω は式(18)となる. 図 3 は四次近似($m=4$)を用いている. 概ね良好な精度が得られていることが分かる.

$$\left.\begin{aligned} \frac{kG}{\rho}\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{kG}{\rho}\frac{d\vartheta}{dx}&=-\omega^2W\\ \frac{kGA}{\rho I}\frac{dW}{dx}+\frac{E}{\rho}\frac{d^2\vartheta}{dx^2}-\frac{kGA}{\rho I}\vartheta&=-\omega^2\vartheta\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\omega_{ij}=\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\sqrt{\frac{1+\left(1+\frac{E}{kG}\right)p\mp\sqrt{\left\{1+\left(1+\frac{E}{kG}\right)p\right\}^2-\frac{4Ep^2}{kG}}}{2\frac{E}{kG}p^2}}$$
$$(i=1,2,\cdots),(j=1,2) \tag{18}$$

ここで,

$$p=\frac{1}{12}\left(m\pi\frac{h}{l}\right)^2 \tag{19}$$

である.

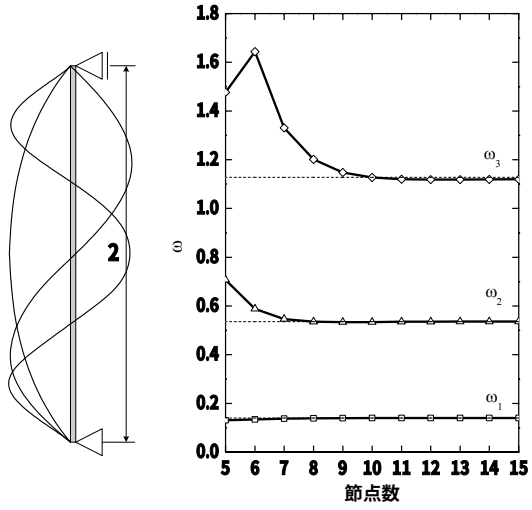

図 3 解析モデルと自由振動の固有値

5. まとめ

可変式サポート台を用いて重み関数中に含まれる節点数を一定に保つことで，少ない節点数かつ節点配置が均等でない場合に解の精度がかなり改善されることから, 可変式サポート台が有効であると言える. また，本手法は Timoshenko 梁の自由振動問題にも適用可能であり，少ない節点数である程度の収束性が得られることを示した. 今後は本論文で示した FPM を一次元問題(曲げ座屈問題，熱伝導等)や二次元問題に適用してその精度を明らかにしていく予定である.

参考文献

・Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz OC, Taylor RL.and Sacco C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problem. Computer methods in applied mechanics and engineering, 139:pp.315-346, 1996

・近藤恭平,「工学基礎」振動論，培風館，(1993)