

複素 Lagrange 多項式を用いた二次元 EF 補間

足利工業大学 正 会 員 ○ 末武 義崇

1. まえがき

エレメントフリー法 (EFGM) については多くの研究報告がなされているが、筆者らも、Lagrange の多項式に基づく簡易 EFGM を構築し、種々の構造解析やデータ補間に適用することにより、その有用性を示してきた¹⁾。Lagrange の多項式を二次元問題に拡張して用いた場合、節点の配置が格子状に限定されてしまうという問題点が残されていたが、適切な複素 Lagrange 多項式を定義することにより、こうした問題点も克服し得ることが明らかになってきている。実際、二次元領域に分布する離散データの補間問題や St. Venant の単純ねじり問題への適用を図った結果、解が調和関数で表現されるような問題に対しては、複素 Lagrange 多項式に基づく新たなエレメントフリー法が極めて有効であり、任意の節点配置にも適用可能であることが明らかになった²⁾。一方、解析手法としての汎用性を高めていくためには、解が必ずしも調和関数で表現されない問題についても検討する必要がある、従来の複素 Lagrange 多項式を用いた定式化に修正を加える必要があることも明らかになった。

本研究では、2 変数関数の複素 Lagrange 多項式を新たに導入し、解が非調和関数で表現されるような問題への適用を試みる。数値計算例として、非調和関数を用いて発生させた二次元離散データの補間問題を取り上げ、エレメントフリー的な補間が有効に機能し得るかどうか検討を行った。

2. 複素 Lagrange 多項式

求めるべき関数 $f(z)$ に関し、 $(N+1)$ 個の離散データ $f_l = f(z_l)$ ($l=0 \sim N$) が与えられている場合、解 $f(z)$ の近似多項式として、次式で定義される Lagrange の補間多項式 $g(z)$ が広く用いられている。

$$f(z) \approx g(z) = \sum_{k=0}^N f_k \phi_k(z) ; \quad \phi_k(z) = \prod_{m=0}^N Z_{m \neq k}(z) , \quad Z_{m \neq k}(z) = \begin{cases} 1 & (m=k) \\ (z-z_m)/(z_k-z_m) & (m \neq k) \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 $\phi_k(z)$ は Lagrange 基底 (Lagrange 補間係数) であり、 $\phi_k(z_l) = \delta_{kl}$ となる性質を持つため、式 (1) は $(N+1)$ 個の離散データ (z_l, f_l) を必ず通過する。エレメントフリー法では、Lagrange 多項式の問題点である “Runge の現象” を回避するために、解析領域内の全ての節点値を用いるのではなく、評価点 z の近傍に設定したサポート領域に含まれる節点のみを用いて評価点の値を計算することになる。

ここで式 (1) の z を複素変数と見なせば、二次元領域に分布する離散データへの適用が期待できる。しかも、この場合、節点分布を格子状のものに限定する必要がないという利点がある。一方、式 (1) は複素数 z のみの正則関数であるから、複素 Lagrange 多項式 $g(z)$ の実部および虚部は、Cauchy-Riemann の微分方程式を満足するはずである。従って、近似対象となる複素関数 $f(z)$ の実部および虚部も、調和関数に限定されてしまう可能性がある。こうした問題点を克服するために、本研究では、互いに複素共役な $z = x + iy$ および $\bar{z} = x - iy$ を変数にもつ、次の 2 変数複素 Lagrange 多項式を導入した。

$$f(z, \bar{z}) \approx g(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N g_{pq} \phi_p(z) \bar{\phi}_q(\bar{z}) ; \quad g_{pq} = f_q + \frac{\partial f}{\partial z} \bigg|_q (z_p - z_q) \quad (2)$$

式 (2) は、離散データとして、節点値 f_l だけでなく微分値 $(\partial f / \partial z)_l$ も与えることを前提としている。

式 (2) を用いれば、評価点 $z = x + iy$ における関数値や微分値を、サポート領域内の節点値 f_k によって次式のように離散的に表現することができる。

$$\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n f(z, \bar{z}) = \mathbf{B}_{mn}^T \mathbf{f} ; \quad \mathbf{B}_{mn}^T = \left[\phi_0^{(m)}(z) \bar{\phi}_0^{(n)}(\bar{z}) \quad \phi_1^{(m)}(z) \bar{\phi}_1^{(n)}(\bar{z}) \cdots \phi_N^{(m)}(z) \bar{\phi}_N^{(n)}(\bar{z}) \right], \quad \mathbf{f}^T = [f_0 \quad f_1 \cdots f_N] \quad (3)$$

キーワード：エレメントフリー法，複素 Lagrange 多項式，補間，任意節点配置，非調和関数

〒326-8558 足利市大前町 268-1 足利工業大学 都市環境工学科 TEL: 0284-62-9981 FAX: 0284-62-9100

3. 離散データの補間

本研究では、二次元離散データの補間計算の具体例を示すために、次式に節点座標を代入し、節点値 f_i および微分節点値 $(\partial f / \partial z)_i$ をそれぞれ発生させることとした。

$$f(x, y) = \cos \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} f(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = -\frac{\pi}{4} \left(\sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2} - i \cos \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi y}{2} \right) \quad (4)$$

式(4)の実変数関数は非調和関数であり、Cauchy-Riemann の方程式を満足しない。

発生させた離散データを式(3)によってエレメントフリー的に補間(EF補間)することで、式(4)の $f(x, y)$ を正確に再現し得るかどうか問題となる。式(3)を用いて EF 補間を行った場合、複素 Lagrange 多項式 $g(z, \bar{z})$ の実部が元の実変数関数 $f(x, y)$ に対応すると考えられる。

4. 数値計算結果

本研究では、二次元領域 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 内で均等な格子状に分布する節点配置と、図1のようなランダムに分布する節点配置との2通りの配置を考えた。それぞれの節点に式(4)で計算した離散データを与えるものとし、式(2)・(3)を用いて、与えた離散データに対する補間計算を実施した。総節点数は、いずれも121節点とした。

数値計算結果を図2から図4に示す。図はいずれも補間計算によって得られた近似関数を、三次元空間内の曲面として表示したものである。図2は、比較のために示した、1変数 Lagrange 多項式(1)に基づく EF 補間の結果であり、図3および図4に示した結果が2変数 Lagrange 多項式(2)に基づく計算結果である。図2を見ると明らかに、式(1)に基づく限り、領域境界上での変動が激しく、良好な補間結果は得られない。一方、図3および図4から明らかに、式(2)を用いることで、節点配置の均等・不均等に関わらず、式(4)で与えられる非調和関数 $f(x, y)$ が比較的良好に再現されていることが分かる。

以上の計算結果を通じ、互いに複素共役な z および $\bar{z}$ を変数にもつ、2変数複素 Lagrange 多項式の導入と、節点値だけでなく微分値をも離散データとして与えることが、複素 Lagrange 多項式に基づく EF 補間において極めて重要であることが明らかになった。

5. まとめ

新たに定義した2変数複素 Lagrange 多項式に基づくエレメントフリー一定式化を行った結果、非調和関数によって発生させた節点値についても、補間計算が可能となった。しかも、新たな EF 補間は、格子状の節点配置だけでなく、任意に分布した節点配置に対しても、有効であることが明らかになった。

参考文献: 1) Y. Suetake, J. Eng. Mech., Vol.128, No.2, pp.231~239, 2002.2.

2) 末武・内田, 第57回土木学会年次学術講演会, I-059, pp.117~118, 2002.9.

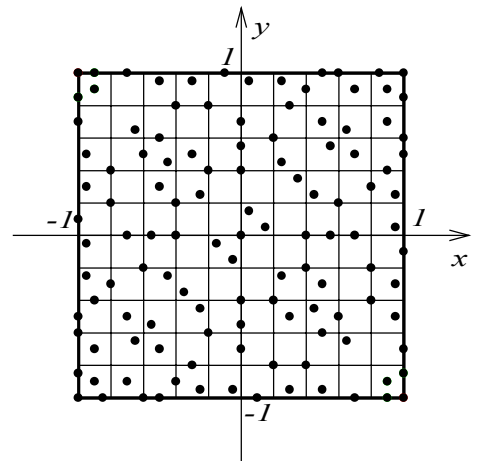


図1. 任意に分布した節点配置

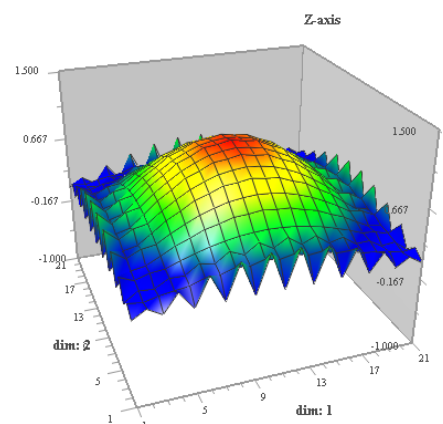


図2. 補間結果(式(1))

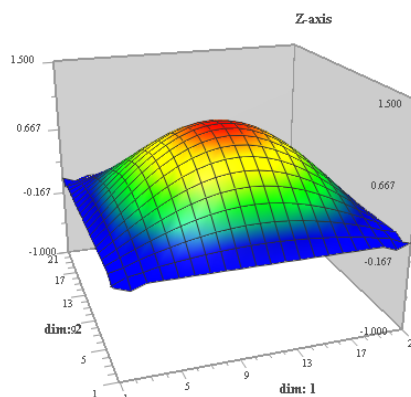


図3. 補間結果(式(2)・均等)

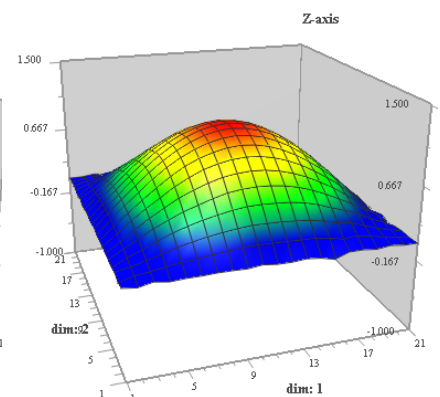


図4. 補間結果(式(2)・不均等)