EFGM を用いた厚板の三次元弾性解析

（株）ライテック　正会員　○大須賀　淳
足利工業大学　正会員　末武　義崇

1．はじめに

要素分割を必要としない新しい数値解析手法の一つであるエレメントフリー法については、多くの研究報告がなされている。筆者らは、Lagrange 多項式を変位関数として用いることで、簡明かつ直接的な EFGM を構築するとともに、梁や薄板の有限変位解析のような一次元あるいは二次元問題に適応し、その妥当性や有用性を示してきた [1)]。

本研究では、Lagrange 多項式に基づく FEGM を三次元問題にも適用可能となるように再定式化し、適用範囲の拡張を図った。具体的な数値解析例として厚板の弾性解析を取り上げ、三次元弾性理論に基づく Fourier 級数解、Reissner-Mindin 理論に基づく Fourier 級数解、および三次元 FEM 解析との比較を通じ、本手法の妥当性・有用性について定量的な検討を行った。

2．エレメントフリー法の定式化

図 1 に示すような、評価点 (ξ,η,ζ) を中心とする、1 辺の長さが 2ρ の立方体をサポート領域と考える。評価点近傍の無次元化変位 $\omega(\xi,\eta,\zeta)$ は、サポート領域内の $(N+1)^3$ 個の節点値 ω_{ijk} $(i,j,k=0\sim N)$ を用いて次式で表現される。

$$\omega(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}\omega_{ijk}\varphi_i(\xi)\psi_j(\eta)\chi_k(\zeta) \qquad (1)$$

ここに、$\varphi_i(\xi)$、$\psi_j(\eta)$ および $\chi_k(\zeta)$ は Lagrange 基底である。式（1）で表される Lagrange 多項式を用いれば、評価点 (ξ,η,ζ) における変位およびその偏導関数は、次式のようにベクトル表示することができる。

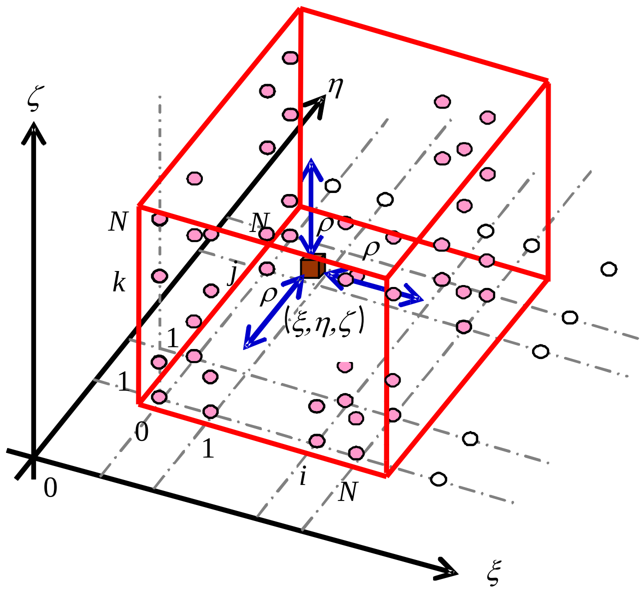

図 1．評価点近傍のサポート領域

$$\omega(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{B}_0^{\,T}.\omega \quad , \quad \partial_\xi\omega(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{B}_1^{\,T}.\omega \quad , \quad \partial_\eta\omega(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{B}_2^{\,T}.\omega \quad , \quad \partial_\zeta\omega(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{B}_3^{\,T}.\omega \qquad (2)$$

ここに、$\boldsymbol{B}_n$ は Lagrange 基底およびその微分からなる係数ベクトルであり、各偏微分演算子に対応している。また、$\boldsymbol{\omega}$ は評価点近傍の節点変位ベクトルである。式（2）によって、任意の評価点における関数値および積分値を、サポート領内の節点変位で直接的に表現することができる。

3．解析モデル

本研究では、図 2 の示すような上面全体に等分布荷重を受ける厚板モデルを解析対象とした。変位境界条件としては、周辺単純支持平板に対応するように、板周辺の境界面におけるたわみをゼロとした他、境界面に平行な方向の面内変位をゼロとした。解析モデルの寸法・材料定数は、縦横比 b/a=1、幅厚比 μ=t/a=1、Young 率 E=2.058×10^6 [MPa]、Poisson 比 ν=0.3 とした。また、総節点数は EFGM 解析および FEM 解析共に、5×5×5=125 節点および 11×11×11=1331 節点の 2 通りとし、いずれも均等配置とした。EFGM 解析に際しては、セル総数を 5×5×5=125、Gauss 積分次数を 5、サポートパラメータを 1.0 として解析を行った。比較のために実施した FEM 解析に際しては、汎用プログラム MARC を使用し、要素タイプを 8 節点立体要素とした。

キーワード　エレメントフリー法，Lagrange 多項式，三次元弾性問題，微小変位理論，厚板の曲げ問題
連絡先　〒326-8558　栃木県足利市大前町 268-1　足利工業大学　TEL：0284-62-0605　FAX：0284-64-1061

４．解析結果

解析結果を図 3 から図 6 に示す。図 3 は、幅厚比μの変化に伴う解析精度の変動を示したもので、横軸に幅厚比μ、縦軸に誤差εをそれぞれとって図示している。なお、誤差εは中央点Oのたわみについて、三次元弾性理論に基づく Fourier 級数解を基準解として計算した。EFGM および EFM については、節点数 125 の結果を示した。また、比較のために、Reissner‐Mindlin の厚板理論に基づく解析結果についても示した。図から明らかなように、全体的に EFGM の方が Reissner‐Mindlin 理論や EFM に比べ、解析結果が良好である。幅厚比μの増大に伴って、Reissner‐Mindlin 理論に従った解析結果は精度が悪化していくが、EFGM、FEM 共に誤差は数%の範囲にとどまっている。一方、幅厚比μが小さい範囲においては、Reissner‐Mindlin 理論に従った解析がほとんど誤差を生じていないのに対し、EFGM、FEM 共に誤差の増加が認められる。これは shear locking の影響と考えられる。しかしながら、EFGM は FEM に比べて誤差が 1/10 程度に抑えられており、shear locking の影響を受けにくいことがわかる。

図 4 から図 6 は図 2 における断面$P-P'$の面内変形モードを示したものである。それぞれ横軸にx方向無次元化面内変位α、縦軸に無次元化鉛直座標ζをとって示した。図 4 および図 5 は、幅厚比μ=1.0 とした場合の結果であり、図 6 は幅厚比μ=0.1 とした場合である。図 4 に示した節点数 125 の場合について見ると、EFGM と FEM はほぼ同一の変形形状を示しているものの、Fourier 級数解との若干の差異が認められる。しかしながら、図 5 のように節点数を 1331 に増加させることにより、三者がほぼ同一の変形形状を示す結果となった。いずれの場合も、横せん断変形の影響によって、断面の直線性が保持されない様子を明確にとらえられている。図 6 を見ると明らかなように、幅厚比μを比較的小さくとると、EFGM、EFM および Fourier 共に変形形状の直線性が保たれており、薄板の曲げ変形の特徴をとらえていることがわかる。また、EFGM は Fourier 解析と同一の結果を与えているのに対し、FEM はかなり大きな変形モードを示す結果となった。

５．まとめ

Lagrange 多項式を用いた EFGM を用い、厚板の三次元弾性解析を実施した。EFGM 解析は幅厚比μの値によらず、広範囲に至って良好な解析結果を与えることが明らかになった。また、FEM 解析と比べると、shear locking をある程度回避できることも明らかになった。面内変形を比較した結果、厚板および薄板共に良好な結果が得られた。節点数が少ないと若干の誤差が見られるものの、厚板および薄板共に変形の特徴をとらえることができた。

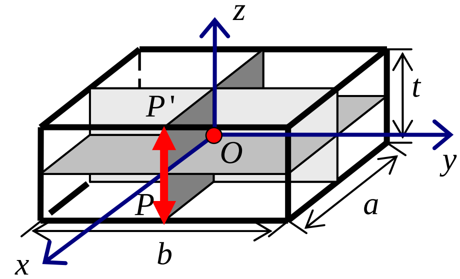

図 2　解析モデル

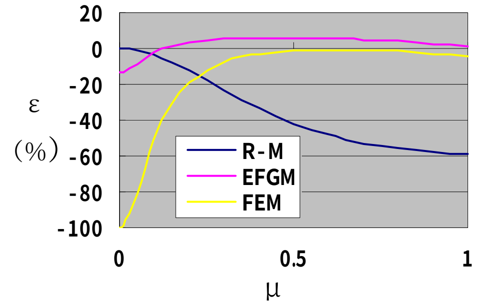

図 3　解析精度に及ぼす幅厚比の影響（点O）

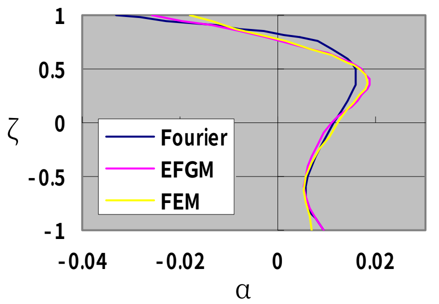

図 4　$P-P'$の面内変形モード（μ=1.0，125 節点）

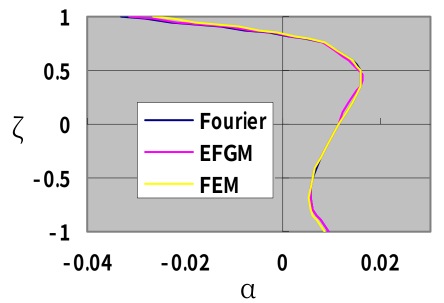

図 5　$P-P'$の面内変形モード（μ=1.0，1331 節点）

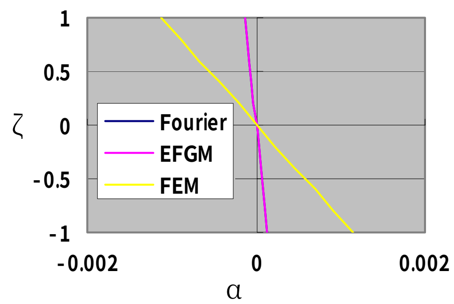

図 6　$P-P'$の面内変形モード（μ=1.0，1331 節点）

参考文献

1）Y.Suetake：Element Free Method based on Lagrange Polynomial，J. of Eng. Mech.，ASCE，Vol.128，No.2，pp.231-239，2002.2.