

滑車を含んだ要素によるケーブル構造の解析

長岡技術科学大学 学生会員 Dang Tung Dang
 長岡技術科学大学 正 会 員 岩崎英治
 長岡技術科学大学 正 会 員 長井正嗣

1. まえがき

ケーブル部材は大空間構造を実現する上で、重要な構造要素である。しかし、はりや柱などの構造要素に比べて、作用する荷重によりその形状が大きく変化する非常に柔な構造要素であることと、荷重が作用するまでその形状が確定しないという設計や施工、構造解析を行う上で、他の構造要素に比べて大きく異なる性質を持っている。このため、応力解析の他に所定の荷重状態での形状決定が重要な問題になる。この問題は、種々の制約条件式の元で形状を決めることになる。各ケーブルの軸力が一定となるような形状決定の問題も重要である。また、ケーブル構造には、架設途中には支点や、他のケーブル上を滑動し、完成時に固定する形式のものが少なくない。この完成前のケーブルの変形や反力を把握しておく必要がある。これらは、ケーブル同士の交点や支点で、ケーブルが滑車を通して接続している状態を考えると実現できる。そこで、本報告では、要素端部に滑車を有するケーブル要素を用いたケーブル構造の解析を行い、この手法の有効性を示す。

2. ケーブル要素

滑車を含んだケーブル構造では、滑車部でのケーブルの滑りにより隣接したケーブル要素の部材長は大きく変化する。このとき、滑り量はケーブル要素長により制限されることとなる。このため、ケーブル部材を少ない要素で表現する必要がある。そこで、要素内での平衡方程式を自動的に満足したケーブル要素を用いる¹⁾。この要素の平衡状態は、次の汎関数の停留条件として得られる。

$$\Pi_C = \int_0^l \left\{ -\frac{\Delta N^2}{2EA} + [(F_x + \Delta F_x) - (N + \Delta N)] \right\} dx + \left[\{ (N + \Delta N) - n_x(Q + \Delta Q) \}^T \Delta u \right]_0^l \quad (1)$$

ここで、 $(N + \Delta N)$ は軸力ベクトルであり、等分布荷重 $(q + \Delta q)$ によるケーブル要素の平衡方程式 $(N +$

$\Delta N)_{,x} = -(q + \Delta q)$ を満足した次式を用いる。

$$(N + \Delta N) = (c + \Delta c) - \int_0^x (q + \Delta q) dx \quad (2)$$

なお、式中の $(Q + \Delta Q)$ は、ケーブル要素端に作用した集中荷重を表している。また、増分前後のケーブルの単位接線ベクトルをそれぞれ e, e^* と表すと、 $(N + \Delta N) = e^{*T}(N + \Delta N)$, $(F_x + \Delta F_x) = e^T(N + \Delta N)$. $e = N/|N|$, $e^* = (N + \Delta N)/|N + \Delta N|$

この汎関数 Π_C において、独立な変分量は、積分定数 Δc と両端の変位 $\Delta u(0)$ と $\Delta u(l)$ である。また、要素内部でも変位分布を仮定していないため上式の汎関数の停留条件を正確に求められれば、少ない自由度で非常にたわんだケーブルの解析も行える。

3. 積分方法

汎関数 Π_C の停留条件式の被積分関数には、軸力 N や $N + \Delta N$ の逆数が含まれている。図1のような代表的なケーブル部材の自重による軸力とその逆数は、両支点間の距離に比べてケーブル長が長い場合には、ケーブル途中での軸力が小さくなり、その逆数の値は、非常に大きな値になる。したがって、積分を正確に行うために数値積分方法に工夫を要する。

軸力の逆数が極値となる位置と変曲点の位置は、以下の条件を満足した点にある。

- $q^T e = 0$ となる位置で、軸力の逆数は最大となる。
- 軸力の逆数の変曲点は、 $q^T e = \pm q/\sqrt{3}$ となる位置にある (等分布荷重の場合)。

なお、 q は分布荷重の大きさであり、 $q = \sqrt{(q^T q)}$ である。そこで、これらの点で積分区間を区切り、それぞれの積分区間内の数値積分には、通常のガウスの積分法を用いることにする。

4. 滑車を有するケーブル要素

図-2のように、ケーブル (h), (i), (j) が節点 I, J に取り付けられた滑車を介して接続されたケーブルの系を考える。滑車を介して接続されたケーブルの軸力は、滑車の摩擦がなければ滑車部で等しくなるので、

Key Words: cable structures, pulley, finite element method, shape finding

〒 940-2188 新潟県長岡市富岡町 1603-1 TEL 0258-46-6000 FAX 0258-47-9600

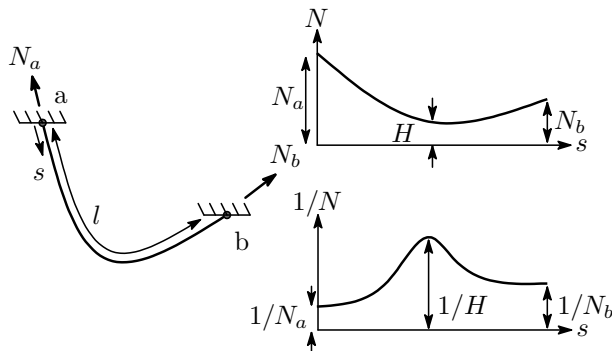


図-1 自重作用下でのケーブルの軸力とその逆数

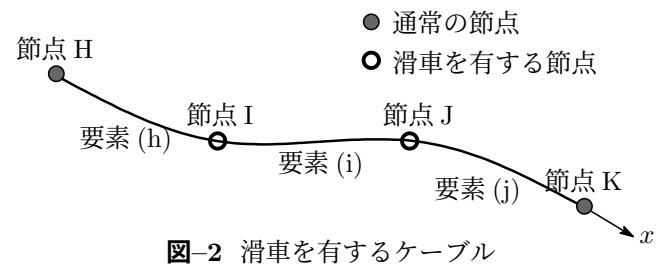


図-2 滑車を有するケーブル

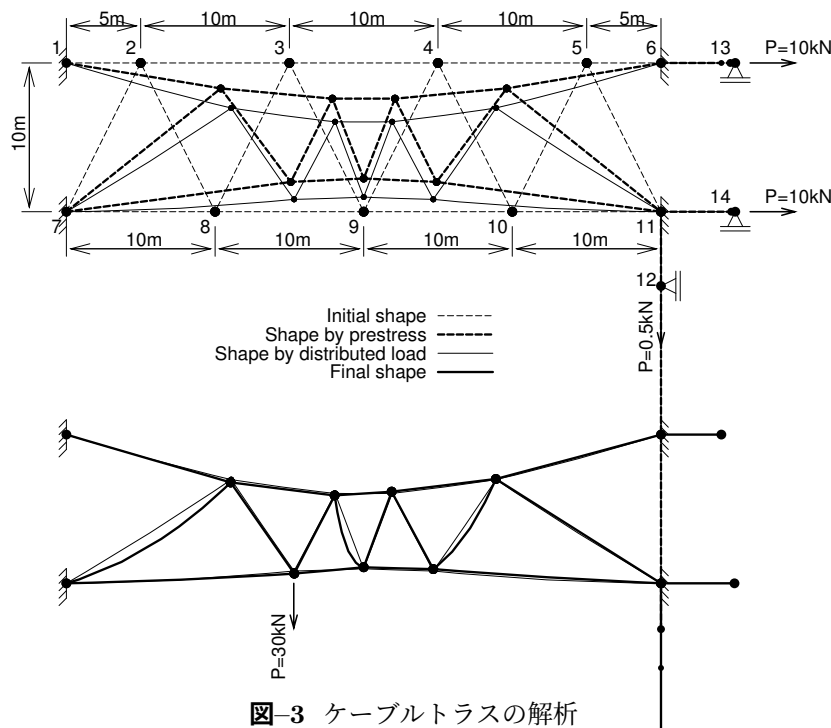


図-3 ケーブルトラスの解析

この条件を汎関数に含めることにより、滑車を表現できる。各ケーブル要素の汎関数を $\Pi_C^{(h)}$, $\Pi_C^{(i)}$, $\Pi_C^{(j)}$ とすると、滑車を有するケーブルの汎関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \Pi_C = & \Pi_C^{(h)} + \Pi_C^{(i)} + \Pi_C^{(j)} \\ & + \Delta \tilde{u}_I \{ (N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)}) - (N_I^{(i)} + \Delta N_I^{(i)}) \} \\ & + \Delta \tilde{u}_J \{ (N_J^{(i)} + \Delta N_J^{(i)}) - (N_J^{(j)} + \Delta N_J^{(j)}) \} \quad (3) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta \tilde{u}_I$, $\Delta \tilde{u}_J$ は、ラグランジュの未定係数であるが、汎関数が停留したときには、それぞれ滑車を有する節点 I と J のケーブルの滑り変位を表している。この変位は、ケーブルに沿った x 軸方向の変位を正としている。また、式中の $(N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)})$ は、要素 (h) の節点 I での軸力を表している。

上式を変形して、要素ごとに表すと、両端に滑車のあるケーブル要素の汎関数は次のように表される。

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta \tilde{u}(N + \Delta N)]_0^l \quad (4)$$

5. 計算例

図3のような3本のケーブルから構成されるケーブルトラスを例に用い、滑車による形状決定とその後の荷重による変形図を示す。上図は、3本のケーブルの端部以外の節点を滑車を有する節点として扱い、滑車内を3本のケーブルが交差している。この状況のケーブルに、張力 $P=10\text{kN}$ と 0.5kN を作用させ、さらに自重を作用させたときの状況を細実線で示している。下図は、この状況で滑車を通常の剛結節点に置き換えて、集中荷重を作用させたときの状況を太実線で示している。このように、滑車を含んだ要素と積分方法の工夫により、ケーブルに沿った軸力が一定となるような形状の決定と、その後の荷重による変形解析を統一的行える。

参考文献

- 1) 岩崎英治, 長井正嗣: 滑車を有する柔ケーブル構造に適用可能な有限要素の開発, 構造工学論文集, Vol.48A, pp.151-158, 2002.