非線形構造解析における増分反復解法に関する研究

佐賀大学　学生会員○山下　修平　　佐賀大学　学生会員　原田　俊幸
佐賀大学　　正会員　帯屋　洋之　　佐賀大学　　正会員　井嶋　克志

１．まえがき

幾何学的非線形解析において、基礎的かつ不可欠な問題として挙げられるのが、座屈点およびその近傍、および極端な大変形域での演算効率と精度の確保である。その問題に関し、これまで有限要素法を基礎とした荷重増分法、変位増分法そして、荷重-変位曲線における弧長を増分パラメーターとする弧長増分法等の、増分手法が提案されてきた。本報告で用いる接線剛性法では、要素固有の剛性が、剛体変位に起因する接線幾何剛性から完全に分離した形で構成されている対称系の剛性マトリクスを用いるため、各増分手法において同一の剛性マトリクスを用いることができる。今回は、数値解析による非線形経路の追跡を行い、荷重および変位、そして弧長の増分反復解法についての提案を行うものである。

２．アルゴリズム

2-1　接線剛性法の基本概念

接線剛性法とは、厳密な定式化の不可能な非線形剛性方程式を用いる必要がなく、接線剛性方程式、厳密な適合条件、要素端力式及び、平衡条件式で構成されたループ・Fig1 により、不平衡力を収束させる手法である。ここで、接線剛性法定式の一般式について述べる。

対象とする有限要素構造物の要素端節点に作用する、互いに独立な要素座標系表示の要素端力ベクトル$\boldsymbol{S}$及び、基準座標系表示の節点力ベクトル$\boldsymbol{D}$の関係式は、両座標系間における平衡条件ベクトル$\boldsymbol{J}$を用いて次のように表せる。

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{JS} \tag{1}$$

これを全微分することにより、基準座標系における節点変位ベクトル$\delta\boldsymbol{d}$の一次関数として表示できる。

$$\delta\boldsymbol{D} = \boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{S} + \delta\boldsymbol{JS} = \left(\boldsymbol{K_0} + \boldsymbol{K_G}\right)\delta\boldsymbol{d} \tag{2}$$

$\boldsymbol{K_0}$ は要素座標系おける要素固有の剛性に起因する要素剛性マトリクスであり、$\boldsymbol{K_G}$ は剛体変位に起因する接線幾何剛性マトリクスである。

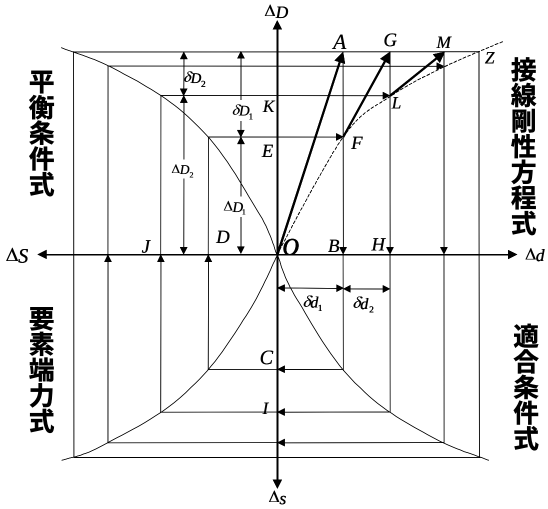

Fig.1 **接線剛性法の反復概念**

2-2　サイマルコントロール法

サイマルコントロール法とは、分布系の荷重条件下を前提とする、変位制御反復手法である。本手法では、骨組構造解析において任意の一節点に強制変位を与え、そのとき発生する不平衡状態より算出される平均換算荷重強度を同時に載荷して、全自由節点の不平衡力及び、変位制御点での反力の収束により、真の釣り合い解を求める手法である。ここで、平均換算荷重強度の算出法を述べる。

変位制御点およびすべての自由節点について、その節点に作用する要素端力の合力に対して釣り合うべき荷重強度を算出し、これの平均値として平均換算荷重強度を求める。節点 i にm個の要素がつながっているときの j 番目の要素の要素長をℓ_jとし、節点 i につながる作用要素端力の合力を$\boldsymbol{S_i}$とすると、この節点における換算荷重強度は

$$\lambda_{ci} = 2 \cdot \boldsymbol{S_i} \Big/ \sum_{j=1}^{m} \ell_j \tag{3}$$

となり、構造系全体での平均換算荷重強度は次式のようになる。

$$\lambda_{AV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ci} \tag{4}$$

キーワード：弧長増分法、サイマルコントロール法
変位制御

連絡先：〒840-8502 佐賀市本庄町一番地
佐賀大学理工学部都市工学科 tel(0952)28-8578

2-3　弧長増分法

弧長増分法は周知の通り、増分パラメーターとして弧長Rを採用し、釣り合い経路上に想定される任意の点を中心とした半径Rの円と、釣り合い経路との交点を捜しだそうとするものである。以下に、接線剛性法において弧長増分法を適用した場合の反復条件式を以下に述べる。

荷重分布ベクトルを$\boldsymbol{f}$と定め、収束段階iにおける､荷重強度λ_iにより計算された不平衡力を$\overline{\boldsymbol{P_i}}$とし、収束段階$i$から$i+1$への未知増分荷重および、未知増分変位を$\Delta\lambda_i$､$\Delta\boldsymbol{d_i}$とした場合、剛性方程式は次のように表すことができる。

$$\boldsymbol{K_{Ti}} \cdot \Delta\boldsymbol{d_i} = \overline{\boldsymbol{P_i}} + \boldsymbol{f} \cdot \Delta\lambda_i \tag{5}$$

ここで、上式における未知増分を、不平衡力の影響による項$\Delta\boldsymbol{d_i^P}$と未知増分荷重の影響による項$\Delta\boldsymbol{d_i^f}$の線形結合の形で表現すると

$$\Delta\boldsymbol{d_i^P} = \boldsymbol{K_{Ti}^{-1}} \cdot \overline{\boldsymbol{P_i}} \tag{6}$$

$$\Delta\boldsymbol{d_i^f} = \boldsymbol{K_{Ti}^{-1}} \cdot \boldsymbol{f} \tag{7}$$

よって、式（6）･（7）を式（5）に代入すれば

$$\Delta\lambda_i = \frac{q_i - \boldsymbol{d_i^T}\Delta\boldsymbol{d_i^P}}{\boldsymbol{d_i^T}\Delta\boldsymbol{d_i^f} + \lambda_i} \tag{8}$$

となる。式（8）のq_iは、弧長の二乗差分を表す。

この場合においても、剛性マトリクス$\boldsymbol{K_{Ti}}$は非対称となることがなく、接線剛性法およびサイマルコントロール法で用いた、共通の接線剛性マトリクスを用いることができる。

３．数値解析

Fig.2 に示した通り、節点数１５、要素数１４の二ヒンジアーチに等分布荷重を載荷した場合の大変形解析による数値計算をおこなった。サイマルコントロール法では、クラウン部（節点・８）を、コントロールポイントに設定し、鉛直下向きの強制変位を$1.0m$のピッチで漸増させていき､経路追跡を行った。

サイマルコントロール法では、平均換算荷重強度による分布荷重が形状に依存して変化するという条件下にあるにもかかわらず、確実に収束し釣り合い解にいたった。弧長増分法にいたっては、確実な収束解への到達と共に、サイマルコントロール法に比べても、高い収束性を示した。Fig.3 は数値解析結果で、クラウン部における変位と等分布荷重強度をプロットしたものである。これより､両手法において、同一の経路をたどり、飛び移りを起こすことなく非線形経路の追跡を行うことができたことが確認できる。

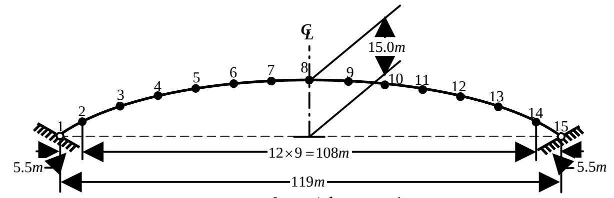

Fig.2 ヒンジアーチ

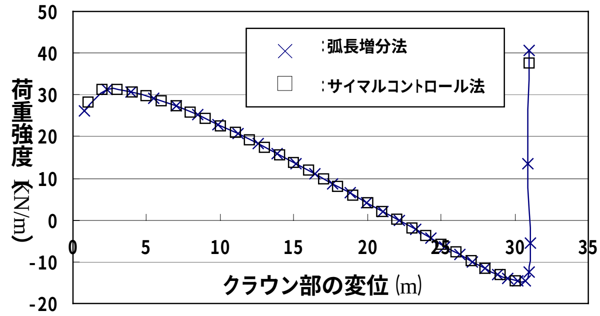

Fig3. 荷重-変位曲線

４．結論

接線剛性法では、求解過程全体においての幾何学的非線形解処理に関する厳密性を完備し、有限要素法で用いるような非線形剛性方程式を直接用いる必要もなく、合理的な反復概念により高い収束性が認められる。各種の増分法を本来の接線剛性法に組み込むことにより、数値解析結果から確認できるように、本来飛び移り等がおこりうる、不安定な非線形解の追跡もできた。また、今回行った接線剛性法のサイマルコントロール法、弧長増分法への拡張の際において、おのおのの数値解析プログラム内で各種コードを共有して用いることができるため、一つの剛性マトリクスを作成すれば荷重､変位制御そして、弧長制御へと容易に変換する数値解析プログラムの作成が可能である、非常に汎用性の高い幾何学的非線形解析システムであるということも確認された。今後分岐経路に際しての経路選定、および板・シェル構造物における三次元解析への拡張を課題にしている。

参考文献

1) 帯屋洋之、井嶋克志、後藤茂夫、荒牧軍治、川崎徳明 “サイマルコントロール法による膨張曲面の形態解析”、日本計算工学会論文集 vol.4,2002,pp.37-44.