

傾斜ケーブルの運動方程式と固有振動特性

長崎大学工学部 正会員 ○呉 慶雄
長崎大学工学部 フェロー 高橋和雄
長崎大学工学部 正会員 中村聖三

1. まえがき

傾斜ケーブルの線形および非線形振動にあたって、一般に使われている運動方程式は2種類で、Irvine による偏平ケーブルを対象とした水平ケーブルの方程式を座標変換を用いて修正した運動方程式¹⁾と山口らによる全体座標系を用いた運動方程式²⁾である。本研究では、局部座標系を用いたケーブルの非線形運動方程式を誘導し、山口らによって誘導された運動方程式²⁾と比較する。さらに、誘導した運動方程式を用いて、傾斜ケーブルの固有振動解析を行い、Irvine による解析結果¹⁾との比較を行う。

2. 運動方程式

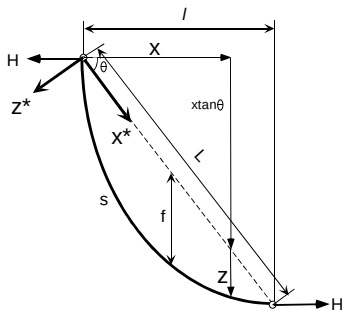


図-1 ケーブルの一般形状

図-1に示すような長さに沿って等分布質量 m を有し、傾斜角 θ を持つケーブルを解析対象とする。

局部座標 (x^*, z^*) におけるケーブルの運動方程式は次式のように得られる。

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\tau \frac{dx^*}{ds} + (T + \tau) \frac{\partial u^*}{\partial s} \right) = m \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - p_{x^*}(x^*, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\tau \frac{dz^*}{ds} + (T + \tau) \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) = m \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} - p_{z^*}(x^*, t) \quad (2)$$

$$\tau = EA \left\{ \frac{dz^*}{ds} \frac{\partial w^*}{\partial s} + \frac{dx^*}{ds} \frac{\partial u^*}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial s} \right)^2 \right\} \quad (3)$$

ここに、 u^* : x^* 方向の変位、 w^* : z^* 方向の変位、 τ : 付加変動軸力、 EA : 軸剛性。

全体座標 (x, z) に座標変換すると、式(1)~(3)は次式のように書き換えられる。

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \tau \frac{dx}{ds} + (T + \tau) \frac{\partial u}{\partial s} \right\} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p_x(x, t) \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \tau \frac{dx \tan \theta + dz}{ds} + (T + \tau) \frac{\partial w}{\partial s} \right\} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p_y(x, t) \quad (5)$$

$$\tau = EA \left\{ \frac{dx \tan \theta + dz}{ds} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{dx}{ds} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \right\} \quad (6)$$

ここに、 u : x 方向の変位、 w : z 方向の変位、 $x^* = x / \cos \theta + z \sin \theta$ 、 $z^* = z \cos \theta$ 、 $u^* = u \cos \theta + w \sin \theta$ 、 $w^* = -u \sin \theta + w \cos \theta$ 、 $p_{x^*} = p_x \cos \theta + p_y \sin \theta$ 、 $p_{y^*} = -p_x \sin \theta + p_y \cos \theta$ 。

また、 $x = x$ 、 $z = x \tan \theta + z$ を書き換えると、山口らの運動方程式²⁾と同じになる。

Irvine の偏平ケーブルの仮定、すなわち、①ケーブル軸方向の変位が小さいため無視できる、② $ds^* \approx dx^*$ 、③全水平力 $H^* + \Delta H^*$ は一定である、を用いると、運動方程式は次式になる。

$$\Delta H^* \frac{d^2 z^*}{dx^{*2}} + (H^* + \Delta H^*) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = m \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} - p_{z^*}(x^*, t) \quad (7)$$

$$\Delta H^* = \frac{EA}{Le} \int_0^L \left\{ \frac{dz^*}{dx^*} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 \right\} dx^* \quad (8)$$

ここに、 $Le = \int_0^L \left(\frac{ds}{dx^*} \right)^3 dx^*$

ケーブルの初期形状を放物線と仮定して、無次元を行うと、上式は次式のようにになる。

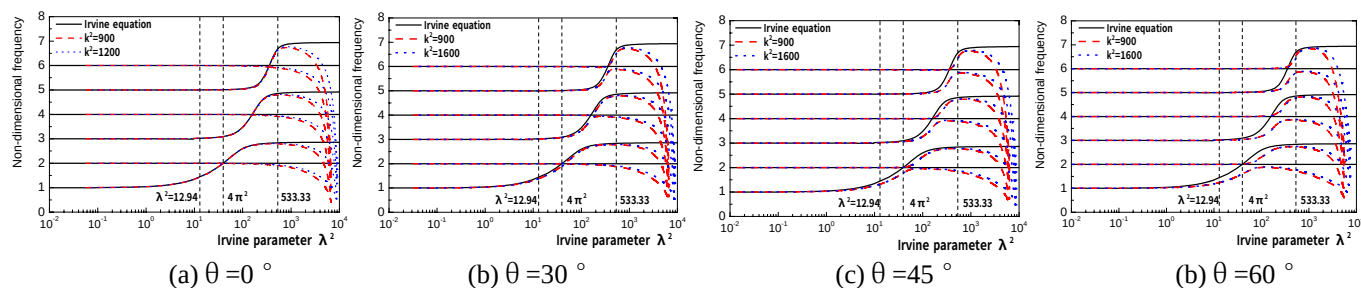
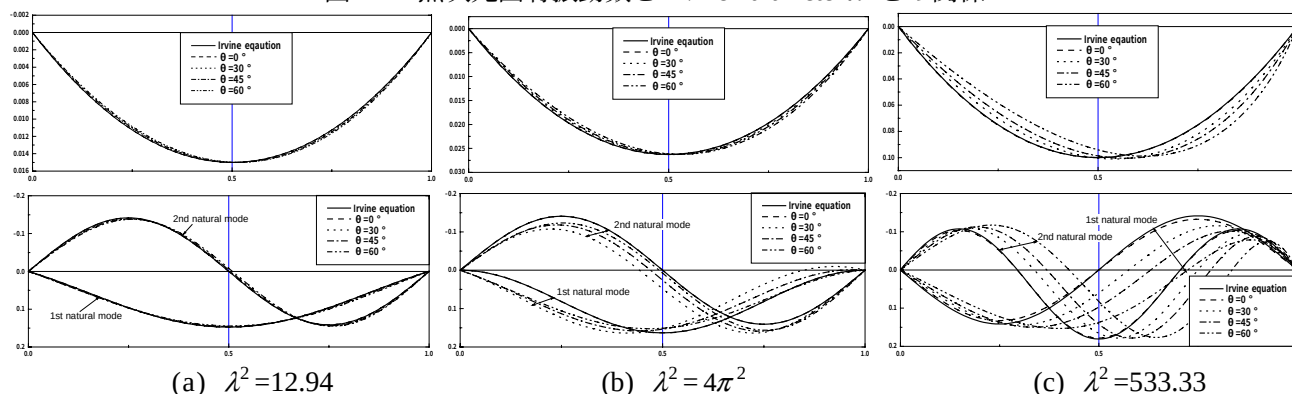
$$-\Delta \bar{H}^* + (1 + \Delta \bar{H}^*) \frac{\partial^2 \bar{w}^*}{\partial \bar{x}^{*2}} = \pi^2 \frac{\partial^2 \bar{w}^*}{\partial \tau^2} - \bar{p}_{z^*} \quad (9)$$

$$\Delta \bar{H}^* = \lambda^2 \left\{ \int_0^1 \bar{w}^* d\bar{x}^* + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{w}^*}{\partial \bar{x}^*} \right)^2 d\bar{x}^* \right\} \quad (10)$$

ここに、 $\lambda^2 = k^2 (8\beta \cos \theta)^2 / Le^*$: Irvine Parameter、 $k^2 = EA/H$: 縦波—横波伝播速度比の自乗、 $Le^* = 1 + (8\beta \cos \theta)^2 / 8$ 、 $8\beta \cos \theta = mgL \cos \theta / H \sec \theta$ 、 $\Delta \bar{H}^* = \Delta H^* / H \sec \theta$ 、 $\bar{p}_{z^*} = p_{z^*} / mg \cos \theta$ 、 $\bar{w}^* = (w^* / L) / 8\beta \cos \theta$ 、 $\bar{x}^* = x^* / L$ 、 $\tau = \omega_0 t$ 、 $\omega_0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{H \sec \theta / m}$: 傾斜弦の第1次固有円振動数。

キーワード：ケーブル、非線形振動、固有振動特性

連絡先：〒852-8521 長崎市文教町 1-14 長崎大学工学部社会開発工学科 (Tel) 095-819-2610, (Fax) 095-819-2627

図-2 無次元固有振動数と Irvine Parameter λ^2 との関係図-3 初期形状および固有振動モード ($k^2=900$)表-1 無次元固有振動数一覧表 ($k^2=900$)

	$\lambda^2=12.94$			$\lambda^2=4\pi^2$			$\lambda^2=533.33$		
	$\beta \cos \theta$	1st freq.	2nd freq.	$\beta \cos \theta$	1st freq.	2nd freq.	$\beta \cos \theta$	1st freq.	2nd freq.
Irvine		1.43	2.00		2.00	2.00		2.00	2.84
0°	0.015	1.43	2.00	0.026	1.99	2.00	0.100	1.89	2.77
30°		1.38	2.00		1.89	2.01		1.87	2.76
45°		1.32	2.00		1.77	2.01		1.82	2.75
60°		1.24	2.00		1.60	2.01		1.70	2.70

3. 固有振動特性の違い

差分法を用いて、式(1)～(3)を離散して、線形項のみを残して固有振動解析を行う。

水平ケーブル ($\theta=0^\circ$) について、本研究の解析結果は Irvine の結果とよく一致している (図-2(a))。Irvine は、偏平ケーブルを対象として、全水平張力が一定であると仮定している²⁾が、Irvine Parameter $\lambda^2 > 533.33$ ときにこの仮定が適用できなくなる。図-2に $k^2=1600$ のときの固有振動数も示している。対称振動モードから逆対称振動モードに移移する点は、 λ^2 を用いると、変化しない。

水平ケーブルに対して、対称1次モードから逆対称1次モードに移移する $\lambda^2=4\pi^2(39.48)$ を基準として、 $\lambda^2=12.94$ および 533.33 に対する固有振動モードを図-3に示す。 $\lambda^2=12.94$ のときには、Irvine による固有モードは傾斜ケーブルの場合もよく一致しているが、表-1に示すように1次固有振動数において差が出てくる。 $\lambda^2=4\pi^2$ および 533.33 のときに、傾斜角が大きくなるとともに、Irvine による固有モードとの差が大

きくなる。

傾斜ケーブルが水平ケーブルと本質的に異なるの原因がケーブルの初期形状は自重の影響で非対称となるためであるといわれている²⁾。このことは図-3の初期形状からも確認できる。しかし、偏平ケーブルに対しては、その誤差が小さいと書かれているが、本研究によって、偏平ケーブルでも、その誤差は傾斜角の増加にとともに大きくなる。

4. まとめ

- 1) 本研究の局部座標を用いた運動方程式は山口らによる全体座標を用いた運動方程式と一致する。
- 2) 傾斜ケーブルに対して、本研究と Irvine の結果との差は傾斜角の増加にとともに大きくなる。Irvine の座標変換による解析は λ^2 が小さい場合にのみ適用できる。

参考文献

- 1) H.M. Irvine : Cable Structures, The Massachusetts Institute of Technology Press, 1981.
- 2) 山口宏樹, 伊藤学 : ケーブルの三次元線形自由振動, 土木学会論文報告集, No.286, pp.29-36, 1979.6.