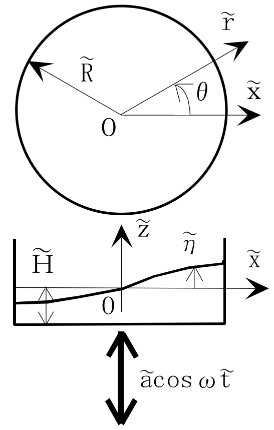
鉛直方向加振を受ける円筒容器内容液の分数調波振動

正会員　高 西 照 彦

１．まえがき　　図－１に示すように，鉛直方向加振を受ける円筒形容器内容液の振動を線形理論によって解析するとき，内容液の運動を支配するのはマシューの微分方程式であり，その解には無数の不安定領域が存在することはよく知られている．１次の共振振動数及びその２倍の振動数近傍おける内容液の動的挙動を明らかにすることは実用上にも重要であるが，これらの振動数の近傍には不安定領域が存在するため，線形理論を用いて解析を行うことは不可能である．したがって，非線形解析を行うことが必要となる．本論は，Ockendon 等[1)] が示した摂動法を用いて，１次共振振動数の２倍の振動数近傍に存在する不安定領域における内容液の非線形振動の解析を行い，その動的挙動を明らかにすることを目的としている．



図－１　円筒形容器
及び座標系

２．基礎方程式　　速度ポテンシャルを$\tilde{\varphi}$ とすれば，流体の運動を支配するラプラスの方程式及び圧力方程式は　$\tilde{\varphi}_{\tilde{r}\tilde{r}}+\tilde{\varphi}_{\tilde{r}}/\tilde{r}+\tilde{\varphi}_{\theta\theta}/\tilde{r}^2+\tilde{\varphi}_{\tilde{z}\tilde{z}}=0$　　(1)

$\tilde{\varphi}_{\tilde{t}}+(1/2)\left\{(\tilde{\varphi}_{\tilde{r}})^2+(\tilde{\varphi}_{\theta}/\tilde{r})^2+(\tilde{\varphi}_{\tilde{z}})^2\right\}+g\tilde{z}+\tilde{z}\tilde{a}\omega^2\cos\omega\tilde{t}+\tilde{p}/\rho=0$　　(2)

ここに，ρ は内容液の密度，$\tilde{p}$ は水圧である．また，下付き添字は微分を表す．境界条件は底面$(\tilde{z}=-\tilde{H})$で　$\tilde{\varphi}_{\tilde{z}}=0$　　(3)，壁面$(\tilde{r}=\tilde{R})$で　$\tilde{\varphi}_{\tilde{r}}=0$　　(4)．自由表面における運動学的条件は波高を$\tilde{\eta}$ とすれば　$\tilde{z}=\tilde{\eta}$ において　$\tilde{\varphi}_{\tilde{z}}=\tilde{\eta}_{\tilde{t}}+\tilde{\varphi}_{\tilde{r}}\tilde{\eta}_{\tilde{r}}+\tilde{\varphi}_{\theta}\tilde{\eta}_{\theta}/\tilde{r}^2$　　(5)．力学的条件は式(2)において$\tilde{p}=0$ 及び$\tilde{z}=\tilde{\eta}$ とおいた式　(6) によって得られる．

３．基礎方程式の無次元化と摂動解　　式(1)～(6)において，以下に示すような無次元化を行う．
$t=\omega\tilde{t}$，$\tilde{R}=\mu_{11}R$，$\tilde{H}=HR$，$\tilde{r}=rR$，$\tilde{z}=zR$．ここに、μ_{11} は$J_1'(\mu_{11})=0$を満たす最小の定数で，$\mu_{11}=1.8411\cdots$ である．また，摂動項としては，$\varepsilon=\tilde{a}/R$ を採用し，これを用いて$\tilde{\varphi},\tilde{\eta}$ を無次元化して
$\tilde{\varphi}=\varepsilon R^2\omega\varphi$　　(7)，$\tilde{\eta}=\varepsilon R\eta$　　(8)　と表す．ω については内容液の１次の固有円振動数ω_{11} の２倍の振動数近傍を考えるものとして，$\omega_{11}/\omega=1/2+\delta$ とおく．ここで，$\delta=\lambda\varepsilon$ とおけば$\lambda=O(1)$ である．次に，摂動解を得るためにφ,η を次式に示す様に摂動項ε を用いて展開する．
$\varphi=\varepsilon^{-1/2}\varphi_0+\varepsilon^0\varphi_1+\varepsilon^{1/2}\varphi_2+\cdots$　　(9)，$\eta=\varepsilon^{-1/2}\eta_0+\varepsilon^0\eta_1+\varepsilon^{1/2}\eta_2+\cdots$　　(10)．式(7)～(10)を式(1)～(6)に代入し，ε で展開して$\varepsilon^{1/2}$ の項までを採用する．まず，$\varepsilon^{-1/2}$ の項については主要項である１次の固有振動のみを採用すれば，$\varphi_0=J_1(r)\cosh(z+H)\cos\theta\, T_0(t)$　　(11)，$\eta_0=-4J_1(r)\sinh H\cos\theta\, T_0'(t)$　　(12) を得る．ここに，$T_0(t)$ は$T_0=C\cos(t/2)+D\sin(t/2)$　　(13)．次に，ε^0 の項からは次式を得る．

$$\varphi_1=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n(\kappa_{nm}r)\cosh\kappa_{nm}(z+H)\cos\theta\, T_{nm}(t) \qquad (14)$$

$$\eta_1=-4\tanh H\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n(\kappa_{nm}r)\cosh\kappa_{nm}H\cos n\theta\, T_{nm}'(t)-\sinh 2H\cos^2\theta\Big[\Big\{(J_1'(r))^2+J_1^2(r)\tan^2\theta/r^2$$
$$+J_1^2(r)\tanh^2 H\Big\}T_0^2-8J_1^2(r)\tanh^2 H\, T_0'^2\Big]$$

(15)．ここに，κ_{nm} は$J_n'(\kappa_{nm}\mu_{11})=0$，$\kappa_{11}=1$を満たす定数．さらに，$\varepsilon^{1/2}$ の項からは次に示すように，式(13)の未定定数C,D を定める連立方程式が得られる．すなわち，$n=m=1$の場合の時間関数$\overline{T}_{11}$ について考えれば　$\overline{T}_{11}''+\overline{T}_{11}/4=E\cos(t/2)+F\sin(t/2)+$（高次の調和関数項）　　(16)．ここに，$E=C\left\{1/2-\lambda/\tanh H+A\left(C^2+D^2\right)\right\}$　　(17)

キーワード：円筒形容器，鉛直振動，非線形振動，摂動法，壁面動水圧
連絡先：〒805-0035　北九州市八幡東区山路２丁目４－８，TEL.093-652-0994

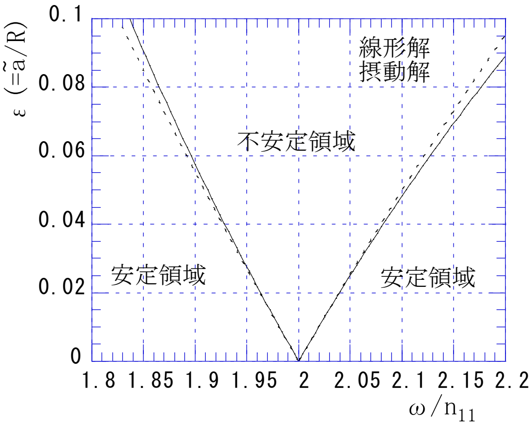
$F = D\{1/2 + \lambda/\tanh H - A(C^2 + D^2)\}$　(18)．また，A は内容液の振動モードから定まる定数である．式(16)の微分方程式の解が永年項を含まないためには　$E = F = 0$　(19)　でなければならない．この連立方程式の解は，$A > 0$ のとき $C = 0,\ \ D = \sqrt{(\lambda/\tanh H + 1/2)/2A}$　(20)　となる．このとき解の存在する範囲は $\lambda/\tanh H + 1/2 > 0$ である．同様にして $A < 0$ のときの解も得られる．解の存在する境界曲線は A の正負に応じて $\varepsilon = \pm(2\omega/\omega_{11} - 1)/\tanh H$　(21)　と表すことができる．C, D が定まれば式(8),(10)から波高が求められて，$\tilde{\eta}/\tilde{H} = (\varepsilon^{1/2}\eta_0 + \varepsilon\eta_1)/H$　(22)．速度ポテンシャルは式(7),(9)によって求められるから，動水圧は $\tilde{\sigma} = \tilde{p} + \rho g\tilde{z}$ に式(2)の $\tilde{p}$ を代入することによって

$$\tilde{\sigma}/\rho g\tilde{H} = -(\varepsilon\tanh H/H)(\omega/\omega_{11})^2\{\varepsilon^{-1/2}\varphi_{0t} + \varphi_{1t} + (\varphi_{0r}^2 + \varphi_{0\theta}^2/r^2 + \varphi_{0z}^2)/2 + z\cos t\} \quad (23)$$

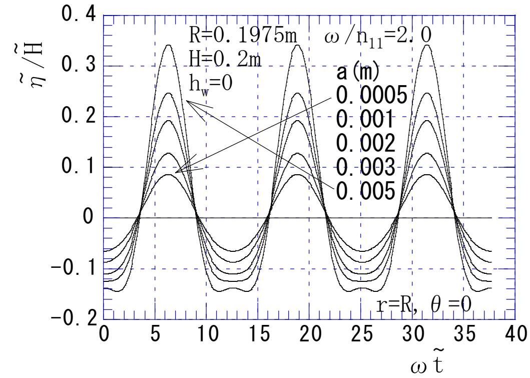
壁面に働く全壁面動水圧は上式を壁面にわたって積分することによってこれを求めることが出来る．

４．数値計算及び結果

数値計算は円筒容器半径が $\tilde{R} = 0.1975$m，水深が $\tilde{H} = 0.2$ mの場合について行った．内容液は水である．加振入力は正弦波とし，その円振動数 ω が $2\omega_{11}$ 近傍である場合を取扱った．加振振幅 $\tilde{a}$ を 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 5.0 mm といろいろ変えた場合について，波高及び壁面動水圧を求めた．



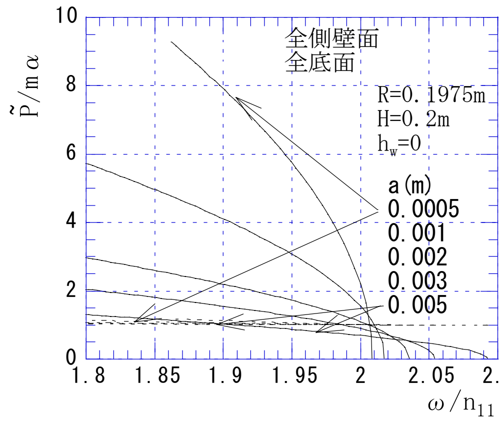
図－２　マシューの方程式の安定不安定領域及び摂動解の境界曲線



図－３　波高の時刻歴応答

図－２は，マシューの方程式を用いて求めた $\omega = 2\omega_{11}$ 近傍の安定領域と不安定領域の境界曲線(実線)と式(21)を用いて求めた境界曲線(点線)を比較したものである．同図から ε が小さいとき両者は非常によく一致していることが分る．

図－３は加振振幅をいろいろ変えた場合について，$\tilde{r} = \tilde{R}, \theta = 0$ における壁面波高の時刻歴応答を示したものである．図から，加振振動数の 1/2 の振動数を持つ波(1/2 分数調波)が卓越していること，また，加振振幅が大きくなるに従って加振振動数と等しい振動数をもつ波が発達してくることが分る．



図－４　動水圧の共振曲線

図－４は，加振振幅をいろいろ変えた場合の壁面動水圧振幅の振動数応答曲線を示したもので，実線が側壁面の，点線が底面の全動水圧である．なお，動水圧の値は内容液の慣性力 $m\alpha$ で基準化している．底面の全動水圧振幅の比は線形計算の場合は振動数に関係なくそれは１になるが，今の場合は現象の非線形性の影響で僅かに１より大きくなっている．

本論で示した摂動法を用いれば，鉛直方向加振を受ける円筒容器内容液の非線形振動を比較的容易に解析することができる．

１）H.Ockendon et al : Resonant sloshing in shallow water,　J.Fluid Mech.,vol.167,1986.