

安定化有限要素法による密度成層を考慮した地形風と降雨解析

中央大学 学生員 ○清水隆博
中央大学 正会員 檜山和男

1. はじめに

本論文は、地形風とそれに起因する降雨の解析を高精度にかつ安定に行うための安定化有限要素法を提案するものである。流れの基礎方程式としては、Boussinesq 近似を仮定した非圧縮 Navier-Stokes 方程式と連続方程式および密度方程式を用いる。離散化手法としては SUPG/PSPG 法¹⁾に基づく安定化有限要素法を用いる。一方、降雨の物理モデルとしては、暖かい雨のモデルである Kessler モデル²⁾を用いる。このモデルの基礎方程式は、雲水量と雨水量の保存式で表され、その離散化手法としては、SUPG 法に基づく安定化有限要素法を用いる。本手法を 2 次元半円柱及び 3 次元実地形を超える安定成層流解析に適用し、本手法の精度及び有効性について検討する。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式と離散化

非圧縮性粘性流れを考え、密度は鉛直方向に一定な勾配 ($d\rho/dz = \rho_z$) の基本場 $\rho_B(z)$ をもち、Boussinesq 近似を仮定する。そのときの運動方程式、連続式、密度方程式はそれぞれ式 (1)~(3) で表される。

運動方程式；

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho g \mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

連続式；

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

密度方程式；

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\mathbf{u} \rho_z \mathbf{k} \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{u}$ は流速、 ρ_0 は基本場の密度、 ρ は同じ高さ z における無限上流での基本場 $\rho_B(z)$ からの密度のずれ、 g は重力加速度、 $\mathbf{k}$ は鉛直方向の単位ベクトルをそれぞれ表している。構成方程式は、以下の式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (5)$$

ここに、 p は圧力、 μ は粘性係数を表している。

一方、降雨の基礎方程式には Kessler モデルを用いる。雲水方程式；

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c + AC + CC - EP - CV = 0 \quad (6)$$

雨水方程式；

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (\mathbf{u} + W\mathbf{k}) \cdot \nabla r - AC - CC + EP = 0 \quad (7)$$

ここに、 c, r は雲水量、雨水量、 W は降雨粒子の降下速度 (式 (8)) を表している。また、 AC, CC, EP, CV はそれぞれ雲水の雨水への転換、雨水による雲水の捕捉、雨水の蒸

発、凝結による変換量を表し、式 (9)~(12) によって表される。これらは 1 ステップ前の値を代入することにより既知量として扱う。

$$W = -38.3 N_0^{-1/8} \cdot r^{1/8} \exp(k_0 z/2) \quad (8)$$

$$AC = k_1 (c - \alpha) \quad (9)$$

$$CC = k_2 \cdot E N_0^{1/8} \cdot c r^{7/8} \exp(k_0 z/2) \quad (10)$$

$$EP = k_3 N_0^{7/20} \cdot c r^{13/20} \quad (11)$$

$$CV = \mathbf{u} \mathbf{k} (A + B z) \quad (12)$$

ここに、 N_0 はマーシャル・パルマー分布の係数 ($10^7 m^{-4}$)、 k_0 は空気の気温低減率 ($10^{-4} m^{-1}$)、 $k_1 \sim k_3$ は定数 ($k_1 = 10^{-3}$, $k_2 = 6.94 \times 10^{-4}$, $k_3 = 1.93 \times 10^{-6}$)、 α は転換の臨界値 ($0.5 gm^{-3}$)、 E は捕捉率 (1.0)、 z は高さ (m)、 A, B は定数 ($A = 3 \times 10^{-3} gm^{-4}$, $B = -3 \times 10^{-7} gm^{-5}$) をそれぞれ表している。

また、地表降雨強度 $R[mm/hour]$ は、雨水量から次のように与えられる。

$$R = 138 N_0^{-1/8} \cdot r^{9/8} \quad (13)$$

境界条件としては、以下に示す Dirichlet 型、Neumann 型境界条件が与えられる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_g \quad (14)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad \text{on } \Gamma_h \quad (15)$$

ただし、降雨解析においては Dirichlet 型境界条件のみが課せられる。

(2) 安定化有限要素法

基礎方程式系に対して、SUPG / PSPG 法¹⁾に基づく安定化有限要素法を適用することにより、以下の重み付き残差式が得られる。

運動方程式；

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \frac{1}{\rho_0} \rho g \mathbf{k} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \{ \tau_{supg1} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} + \tau_{pspg} \nabla q \} \\ & \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{\rho_0} \rho g \mathbf{k} \right\} d\Omega = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

密度方程式；

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \mathbf{u} \rho_z \mathbf{k} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{supg2} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} \\ & \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \mathbf{u} \rho_z \mathbf{k} \right) d\Omega = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

Key Word: 安定化有限要素法, 地形風解析, 密度成層, Kessler モデル
〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 中央大学
TEL 03-3817-1815, E-mail s-tak@civil.chuo-u.ac.jp

雲水方程式；

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c + f_c \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{supg2} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c + f_c \right) d\Omega = 0 \quad (18)$$

雨水方程式；

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial t} + (\mathbf{u} + W\mathbf{k}) \cdot \nabla r + f_r \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{supg2} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial t} + (\mathbf{u} + W\mathbf{k}) \cdot \nabla r + f_r \right) d\Omega = 0 \quad (19)$$

ここに、安定化パラメータ $\tau_{supg1}, \tau_{supg2}, \tau_{pspg}$ は以下のよう

$$\tau_{supg1} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|\mathbf{u}\|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$\tau_{pspg} = \tau_{supg1} \quad (21)$$

$$\tau_{supg2} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|\mathbf{u}\|}{h_e} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (22)$$

ここに、 ν は粘性係数を表している。式(18),(19)における f_c, f_r はそれぞれ雲水方程式、雨水方程式における雲物理の変換量(AC, CC, EP, CV)をまとめたものである。

式(16)~(19)に対して、2次元問題では線形三角形1次要素、3次元問題では線形四面体1次要素を用いて補間を行うことにより有限要素方程式を得る。

時間方向の離散化において、時間微分($\partial \mathbf{u} / \partial t$)は以下のよう

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \doteq \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} \quad (23)$$

ここに、 Δt は微小時間増分量である。時間微分の精度と安定性をコントロールするパラメータである θ には、本研究では2次精度である $\theta = 0.5$ のCrank-Nicolson法を用いている。なお、圧力、連続式は陰的に扱っている。また、密度、雲水量、雨水量についても同様にCrank-Nicolson法により離散化している。

3. 2次元半円柱を超える地形性降雨解析

地形性降雨解析問題への本手法の有効性を検討するため、2次元半円柱問題を例に流れ解析、降雨解析を行った。

解析領域、境界条件はFig.1のように設定した。解析に用いた有限要素分割の節点数は10,360、要素数は20,044(最小分割幅24.14m)である。流入流速として $u^* = 2z^{0.25} \text{m/sec}$ を与えた。降雨解析の境界条件として、上層、流入側からの降水粒子の供給はなく($r=0$)、流入側からは常に一定の飽和水蒸気が供給される($c=0$)とする。なお、微小時間増分量、成層度はそれぞれ $\Delta t=0.5 \text{sec}$ 、 $K \doteq 0.02, 0.6, 1.0$ とした。

Fig.2,3,4に風が吹きはじめから1時間後における流れ線図と雲水量、雨水量の分布図を示す($K \doteq 0.02$)。Fig.2より、安定した流れ場の解析結果を得ることができている

ことが分かる。また、Fig.3,4より、円柱上空の上昇流により雲が発生し移流していき、雨水量についても雲水量の変化に対応したものになっていることが分かる。

また、Fig.5にFig.1中のA,B点での地表降雨強度の時刻歴を示した。円柱上空の上昇流の影響と円柱後方の渦の影響がA点、B点の地表降雨強度に現れている。

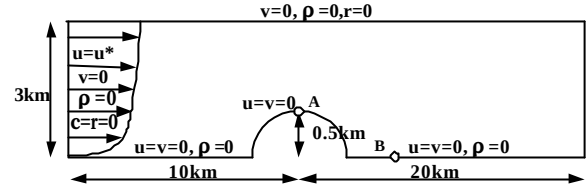


Fig.1 Numerical example

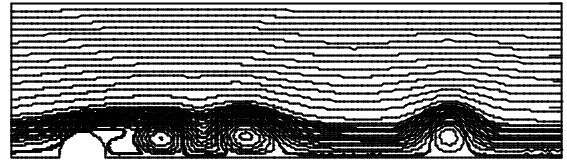


Fig.2 Computed stream line(time=1hour)

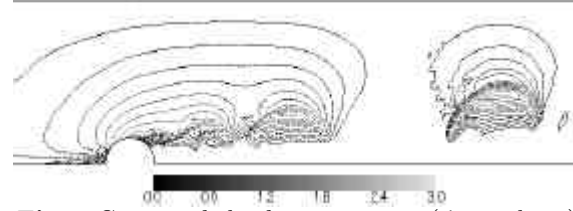


Fig.3 Computed cloud water content(time=1hour)

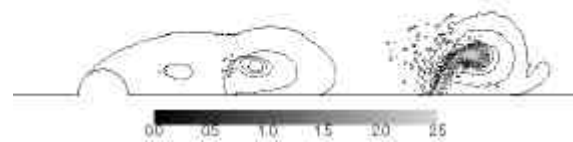


Fig.4 Computed rain water content(time=1hour)

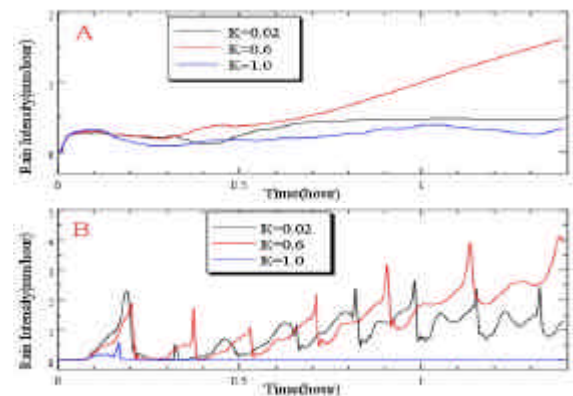


Fig.5 Rainfall intensity

4. 結論

本論文により安定化有限要素法による密度成層を考慮した地形風と降雨解析手法を提案した。数値解析により、本手法は安定で定性的に妥当な解を与えることを示した。降雨解析の有効性の検討が今後の課題である。

参考文献

- 1) T.Tezduyar, 'Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations', Advances in Applied Mechanics, 28, pp.1-44, 1991.
- 2) Kessler,E., 'Models of microphysical parameters and processes', Meteorological Monographs, Vol.10, pp.26-31, 1969.