# 安定化有限要素法による密度成層を考慮した地形風解析

中央大学　学生員　○ 倉橋　哲弘
中央大学　学生員　　清水　隆博
中央大学　正会員　　樫山　和男

## 1. はじめに

本報告は，安定化有限要素法による密度成層を考慮した地形風解析のための数値解析手法の構築を行うものである．基礎方程式は Boussinesq 近似を仮定した Navier-Stokes 方程式を用い，数値解析手法は安定化手法の一つである SUPG/PSPG 法に基づく有限要素法を用いた．数値解析例として半円柱周り流れ解析を取り上げ，幾つかの成層度の下で解析を行い，既存の実験・解析結果との比較により，本手法の妥当性について検討を行った．また，2 次元解析結果と 3 次元解析結果の比較も行った．

## 2. 数値解析手法

### (1) 支配方程式

鉛直方向に一定な密度勾配 $\left(\frac{d\rho}{dz}=-1\right)$ を持つ流れ場において，Boussinesq 近似[1] を仮定した Navier-Stokes 方程式，連続式，密度方程式はそれぞれ式 (1),(2),(3) の通り定められる．いずれも無次元化されている．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{Fr^2}\rho\delta_{id}=0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i}=u_i\delta_{id}. \quad (3)$$

上式において，$x_i$ は $i$ 方向の座標，$u_i$ は流速，$p$ は圧力，$\rho$ は同じ高さにおける無限上流での基本場 $\rho_B(z)$ からの密度のずれを表す．また，$\delta_{ij}$ は Kronecker の delta，$d$ は次元数，$Re\left(=\frac{UL}{\nu}\right)$ は Reynolds 数，$Fr\left(=\frac{U}{NL}\right)$ は Froude 数，$N\left(N^2=-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho}{dz}\right)$ は Brunt-Väisälä 振動数を表す．

### (2) 安定化有限要素法

基礎方程式 (1),(2),(3) に対して，移流卓越・圧力振動を抑えるための安定化有限要素法（SUPG/PSPG 法[2]）を適用することにより，以下に示す弱形式を得る．

$$\int_\Omega u_i^*\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\rho}{Fr^2}\delta_{id}\right)d\Omega+\int_\Omega p^*\frac{\partial u_i}{\partial x_i}d\Omega$$
$$+\int_\Omega\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}\left\{-p\delta_{ij}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}d\Omega$$
$$+\sum_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}}\int_{\Omega_e}\tau_e\left(u_k\frac{\partial u_i^*}{\partial x_k}+\frac{\partial p^*}{\partial x_i}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{Fr^2}\rho\delta_{id}\right)d\Omega_e=0, \quad (4)$$

$$\int_\Omega \rho_i^*\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+u_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i}-u_i\delta_{id}\right)$$
$$+\sum_{e=1}^{n_{\mathrm{elm}}}\int_{\Omega_e}\tau_e' u_j\frac{\partial \rho_i^*}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+u_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i}-u_i\delta_{id}\right)d\Omega_e=0. \quad (5)$$

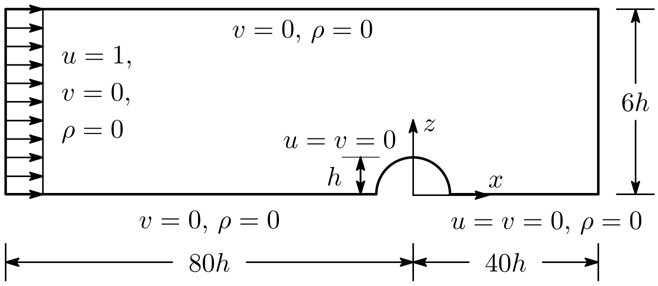
ここで，$\Omega$ は解析領域，$u_i^*, p^*, \rho_i^*$ はそれぞれ流速，圧力，密度の重み関数，$n_{\mathrm{elm}}$ は解析領域内における要素の総数，$\tau_e, \tau_e'$ は安定化パラメータを表す．

更に (4),(5) 式に対して，P1/P1（流速・圧力 1 次）要素により空間方向の離散化を，Crank-Nicolson 法を用いて時間方向の離散化を行い，それにより得られた連立 1 次方程式を各時間ステップごとに解く．連立 1 次方程式の解法には，Element-by-Element Bi-CGSTAB2 法を用いた．

## 3. 半円柱周り流れ解析

### (1) 計算条件

数値解析例として，地形の単純化モデルである半円柱周りの流れ解析を行った．解析領域および境界条件は，2 次元解析の場合は**図－1** の通りに設定した．3 次元解析に関しては，**図－1** を右手座標系の $z-x$ 平面とし，奥行き方向（$y$ 方向）に $4h$ をとった．3 次元領域の境界条件は $y$ 軸に垂直な平面に $v=0$ を与えた．解析に用いた 2 次元，3 次元有限要素分割図は**図－2** に示す通りであり，総節点数はそれぞれ 4675，42075，総要素数はそれぞれ 8928，214272，最小分割幅はともに $0.020h$ である．また計算条件には，**表－1** に示す 5 ケースの成層度 $K$（無次元パラメータ）を適用した（ここでの $K$ と $Fr$ との関係は，$Fr=\frac{6}{\pi K}$）．微小時間増分量 $\Delta t$ 及び Reynolds 数 $Re$ は全ての計算に共通してそれぞれ $\Delta t=0.01$，$Re=2000$ を用いた．

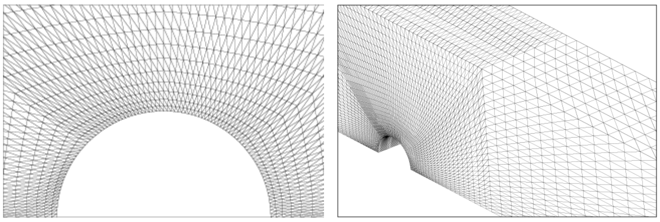



**図－1**　解析領域及び境界条件（2 次元）

**表－1**　計算条件

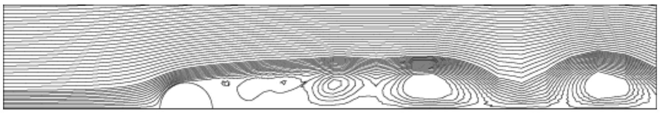
| | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) |
|---|---|---|---|---|---|
| 成層度 $K$ | 0.02 | 0.5 | 1.0 | 1.8 | 2.5 |
| Froude 数 $Fr$ | 100.00 | 3.82 | 1.91 | 1.06 | 0.76 |

**KeyWords：**　有限要素法，SUPG/PSPG 法，地形風解析，密度成層
**連絡先：**　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　E-mail: kt-98426@kc.chuo-u.ac.jp

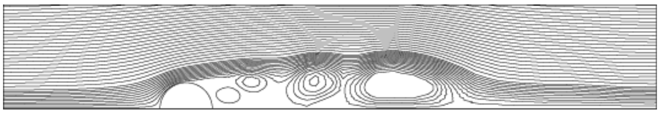


2 次元要素分割　　3 次元要素分割

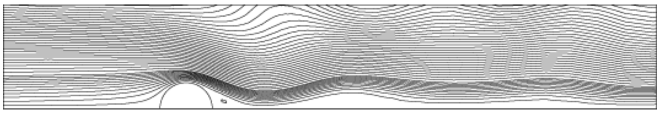
**図－２**　有限要素分割図（半円柱近傍）



(a) $K = 0.02$ $(Fr = 100)$, $t = 157$

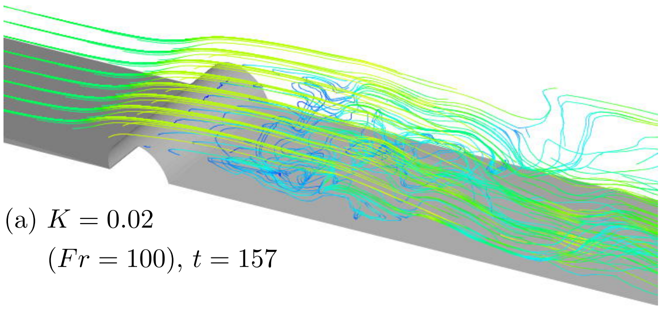


(b) $K = 0.5$ $(Fr = 3.82)$, $t = 146$

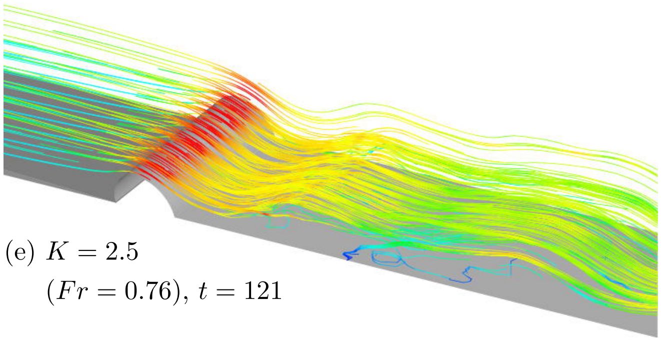


(e) $K = 2.5$ $(Fr = 0.76)$, $t = 121$

**図－３**　各成層度における半円柱周辺の流線図（2 次元）



(a) $K = 0.02$
$(Fr = 100)$, $t = 157$



(e) $K = 2.5$
$(Fr = 0.76)$, $t = 121$

**図－４**　各成層度における半円柱周辺の流線図（3 次元）

**(2)　解析結果及び考察**

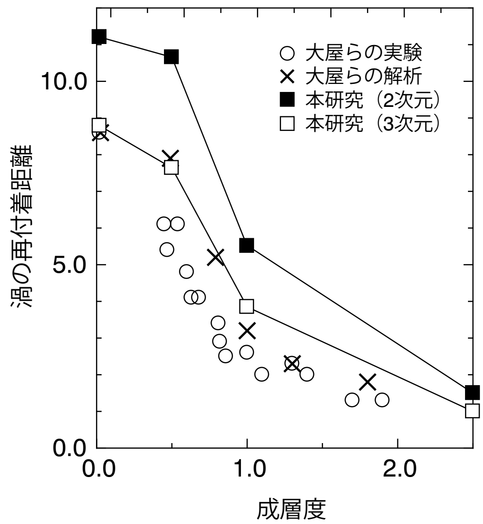
**図－3**, **4** に，各成層度における流線図を示す．図は渦の再付着距離が平均値である時刻を示している．なお，(d) については，有限要素分割の解像度の粗さから，はっきりとした渦を捉えることができなかった．**図－3**, **4** から分かるように，半円柱周辺は非定常性が強く，成層度が大きくなるにつれて，半円柱下流における渦の放出が押さえつけられていることが確認できる．また，3 次元解析結果のうち (e) については半円柱上流部に重力波の影響と思われるブロッキング現象が観察される．以上より，成層度の変化が流れ場に変化を及ぼしていることを確認することができた．

更に，本解析結果の妥当性を調べるために，各計算条件において，無次元時刻 $121 \le t \le 200$ 内で渦の再付着距離の平均値を測定した．それらを大屋らの実験・解析結果[3] と比較した．成層度と渦の再付着距離の関係を**図－5** に示す．2 次元・3 次元解析結果ともに，成層度が大きくなるにつれて渦の再付着距離が短くなるという定性的な結果を捉えることができている．また，3 次元解析結果の方が 2 次元解析結果に比べて大屋らの実験値に近く，実現象をより正確に把握できることが判明した．

## 4.　おわりに

本研究では，安定化有限要素法による密度成層を考慮した地形風解析のための数値解析手法の構築を行い，更に本手法の妥当性を検討するために実験結果との比較を行った．その結果，以下に示す結論を得た．

- 2 次元・3 次元解析ともに，成層度の変化が流れ場に及ぼす変化を捉えることができた．




**図－５**　成層度と渦の再付着距離の関係

- 成層度が低いほど 3 次元解析の方が 2 次元解析に比べ，実現象をより正確に把握できることが分かった．

今後は，乱流モデルを導入するとともに，本手法を実地形の風解析に適用する予定である．

**参考文献**

1) 九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻：地球環境を学ぶための流体力学, 成山堂書店, pp.195-223, 2001.
2) T.E.Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advances in Applied Mechanics*, 28, pp.1-44, 1912.
3) 大屋祐二ら：地面上の 2 次元物体を超える安定成層流の風洞実験と数値解析，九州大学応用力学研究所所報，第 74 号，pp.189-200，1992.