

境界積分方程式を用いた3次元時間域動弾性問題の高速解法

理化学研究所 非会員 高橋 徹
 京都大学工学研究科 正会員 ○西村直志
 福井工業大学工学部 フェロー 小林昭一

1 序論

近年、高速多重極法などの高速アルゴリズムを用いて境界積分方程式法を加速し、大規模問題を解く試みがなされている。我々も Ergin らのスカラ波動方程式の高速解法を拡張して時間域動弾性問題の高速解法を開発し、既に2次元動弾性問題においてはまとまった研究成果を得ている[1]。本稿では、その3次元問題への拡張を検討する。

ここで示す3次元時間域動弾性問題の高速解法とは、境界積分方程式法に現れる諸ポテンシャルを、基本解の平面波展開と時空の階層構造を利用して高速に評価する算法と、線形方程式の反復解法（ここではGMRES）を組み合わせたものである。この解法を空間と時間の自由度が各々 N_s, N_t であるような問題に適用する場合、その計算量は、使用する Legendre 変換の algorithm に依存して $O(N_s \log^2 N_s N_t)$ ないしは $O(N_s^{3/2} N_t)$ 程度となる。これは従来法の $O(N_s^2 N_t^2)$ に比較して大幅な改善である。本稿では定式化のあらましと、数値例を示す。

2 定式化

考える領域を $D \subset \mathbb{R}^3$ とし、その境界を $\partial D = S$ とする。簡単のため斉次初期条件を仮定すると3次元動弾性問題の初期値境界値問題は、

$$\begin{aligned} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} &= \rho \ddot{u}_i \quad \text{in } D \times (t > 0) \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} &= \mathbf{0} \quad \text{in } D \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } S_1 \\ t &= \bar{t} \quad \text{on } S_2 \end{aligned}$$

を満たす関数（変位） $\mathbf{u}$ を求める事に帰着する。ここに $\mathbf{x}$ 、 t は空間、時間変数であり、 $\mathbf{t}$ は表面力、 λ, μ は Lamé 定数、 ρ は密度である。この問題の解は積分方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}, t) + \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y = \\ \int_S \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad \mathbf{x} \in S, \quad t > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

を解く事によって得られる。ここに $*$ を重ねた積分は Cauchy の主値を、 $*$ は時間に関する畳み込みを表す。また Γ_{ij} は動弾性学の基本解であり、 T_{ij} は2重曹核

$$T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = C_{jlnm} n_l(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_n} \Gamma_{im}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)$$

である。ここに C_{ijkl} は弾性定数テンソルである。

式(1)を解く際、従来の境界積分方程式法では適当な時間形状関数 $\Psi_\alpha(t)$ と時間増分 Δt を導入し境界値 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ などを

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{\alpha}),$$

等と離散化する。ここに $t_{\alpha} = \alpha \Delta t$ 。すると、(1) は明らかに次の形に離散化される。

$$\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{x}^{\alpha} = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{y}^{\alpha} - \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \left(\mathbf{W}^{(\alpha-\beta+1)} \mathbf{u}^{\beta} - \mathbf{U}^{(\alpha-\beta+1)} \mathbf{t}^{\beta} \right)$$

ここに $\mathbf{x}^{\alpha} (\mathbf{y}^{\alpha})$ は時刻 $t = t_{\alpha}$ における未知（既知）の境界量を表す。行列 $\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{B}^{(1)}$ は疎であるが、 $\mathbf{U}^{(i)}$ と $\mathbf{W}^{(i)}$ は i が大きくなるにつれて密になる。従って上式右辺の計算を N_t ステップ分実行すると、計算量は $O(N_s^2 N_t^2)$ となって、大規模問題には適さない事がわかる。

一方、基本解 $\Gamma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ に対しては次の平面波展開

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial_t}{8\pi^2} \int_{S_k} \left[\frac{k_i k_j}{\rho c_L^3} \delta(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} / c_L) \right. \\ \left. + \frac{k_p k_q e_{pi} e_{qjk}}{\rho c_T^3} \delta(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} / c_T) \right] dS_k + \Gamma'_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (2) \end{aligned}$$

が成り立つ事が示される。ここに c_L, c_T はそれぞれ P 波、S 波の波速であり、 S_k は単位球、 $\mathbf{k}$ は S_k 上の位置ベクトル（従って単位ベクトル）である。また、 $\Gamma'_{ij}(\mathbf{x}, t)$ は基本解の時間を反転したもので、ghost と呼ばれる物理的意味の無い量である。

式(2)を用いて(1)の層ポテンシャルを表現する。今、2つの交わらない球形領域を想定し、その一方の球 S_s (中心 $\mathbf{s}$) に含まれる境界 S の部分を S_* とする。この時、もう一方の球 S_o (中心 $\mathbf{o}$) に含まれる観測点 $\mathbf{x}$ 及び時刻 t に対して $S_* \times (0, t)$ 上の密度 $\mathbf{t}$ 、 $\mathbf{u}$ による層ポテンシャルを評価する。ここで、二つの球の半径は等しく R とし、中心間距離 $|\mathbf{o} - \mathbf{s}|$ を $R_c (> 2R)$ とする。解析対象とする時間区間を重なり合う有限区間 (T_1^z, T_2^z) で覆い、密度関数 $\mathbf{u}$ 等を区間 (T_1^z, T_2^z) に台を持つ関数 $\mathbf{u}^z$ 等によって

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_z \mathbf{u}^z(\mathbf{x}, t)$$

キーワード：高速解法、時間域境界積分方程式法

〒606-8501 京都市左京区吉田本町 Tel 075-753-5115 FAX 075-753-5066

等と分解する。この時、 $R_c > c_L(T_2^z - T_1)^z + 2R$ が成り立つならば $\mathbf{x} \in S_o$ 、 $t > T_2^z$ に対して次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{S_*} (T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j^z(\mathbf{y}, t) - \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) * t_j^z(\mathbf{y}, t)) dS_y \\ &= -\frac{\partial_t}{8\pi^2} \int_{S_k} [k_i \delta(t - (\mathbf{x} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{k}/c_L) * \mathcal{O}^z(\mathbf{s}, t, \mathbf{k}) \\ & \quad + e_{pik} k_p \delta(t - (\mathbf{x} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{k}/c_T) * \mathcal{O}_k^z(\mathbf{s}, t, \mathbf{k})] dS_k \end{aligned}$$

ここに関数 $\mathcal{O}^z$ と $\mathcal{O}_k^z$ ($k = 1, 2, 3$) は outgoing rays と呼ばれ次式で定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^z(\mathbf{s}, t, \mathbf{k}) &= \int_{S_*} \left(\frac{C_{jlnm} n_l k_m k_n}{\rho c_L^4} \dot{u}_j^z(\mathbf{y}, t - (\mathbf{s} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{k}/c_L) \right. \\ & \quad \left. - \frac{k_j}{\rho c_L^3} t_j^z(\mathbf{y}, t - (\mathbf{s} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{k}/c_L) \right) dS_y, \\ \mathcal{O}_k^z(\mathbf{s}, t, \mathbf{k}) &= \int_{S_*} \left(\frac{C_{jlnm} n_l e_{qmk} k_q k_n}{\rho c_T^4} \dot{u}_j^z(\mathbf{y}, t - (\mathbf{s} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{k}/c_T) \right. \\ & \quad \left. - \frac{e_{qjk} k_q}{\rho c_T^3} t_j^z(\mathbf{y}, t - (\mathbf{s} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{k}/c_T) \right) dS_y. \end{aligned}$$

Outgoing ray は多重極法における多重極 moment に相当する量である。これらを z について加え合わせれば求めたい層ポテンシャルが得られる。

以上が提案する定式化の核心部分である。これと時空に導入した階層構造を用いて高速解法を定式化する事ができるが、これ以上の詳細は割愛する。

3 数値例

図1に示す $4 \times 4 \times 4$ の球孔に平面波が入射した場合の応答を解析した。適当な無次元化によって $c_L = 1$ 、 $c_T = 1/\sqrt{2}$

と取り (Poisson 比は 0)、球の中心間距離は各座標軸方向に $2a$ ($= 0.15$)、半径は $0.9a$ とした。また、各球は辺長が約 0.02 の三角形要素に分割した。全要素数は 20,480 である。時間増分は $\Delta t = 0.01$ とし、入射波としては、真下から入射し、単発の余弦波形を有する波長 $4ac_L$ の平面 P 波を考える。

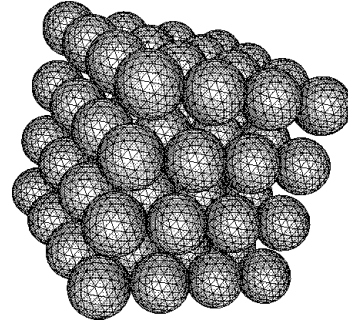


図1: 要素分割 (61,440 DOF)

解析結果として、図2に種々の時刻の境界変位を plot した。解析解が無いので精度は不明であるが、結果は自然である。なお、この場合を含む 2、3 の解析例の動画が <http://geehost.gee.kyoto-u.ac.jp/~ttaka/eabe.html> にある。

参考文献

- [1] 高橋 徹, 西村 直志, 小林 昭一, 2次元時間域動弾性問題に対する高速境界積分方程式法, 機械学会論文集 (A) 67 巻 661 号, 1409-1416, 2001

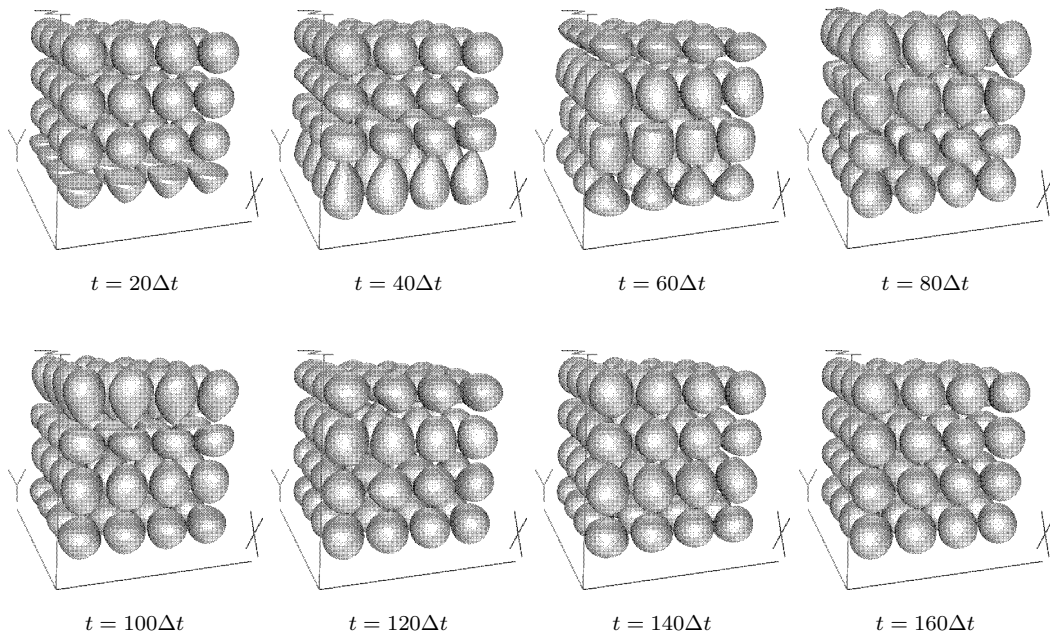


図2: 平面 P 波の入射を受ける円孔群の変形時刻歴