

成層弾性流体波動場の過渡的 Green 関数のスペクトル表現について

東京理科大学 理工学部 学生会員 栗田圭一
東京理科大学 理工学部 正会員 東平光生¹

1. はじめに

成層構造を持つ波動場を表す Green 関数について、その数理解釈は Lamb などの多くの研究者によって与えられてきた。その中で近年、著者の一人である東平は成層構造を有する波動場の Green 関数を離散・連続スペクトルに対する固有関数展開の視点から統一的に表現する事に成功した。これによれば、Green 関数を構成する波数積分の中で留数による寄与は離散スペクトルとして、分岐点まわりの積分による寄与は連続スペクトルとして捉える事ができる。本論文では、この結果を受けて多層構造の波動場における過渡的 Green 関数を離散・連続スペクトルによる固有関数で表現する事を試みるとともに数値計算によるその性質を検討する。

2. 解析モデルと基礎方程式

本論文では、Fig1 で示されている l 層からなる成層弾性流体での点震源による波動場を扱い、過渡的 Green 関数のスペクトル表現について検討した。ここでは円筒座標系 (r, θ, z) を用い、鉛直座標 z は、鉛直下向きに正の方向をとる。また、自由表面の鉛直座標 z_1 は $z_1 = 0$ とし、層境界の鉛直座標を表すのに layer index を用いる。図中、 ρ は質量密度、 α は音波速度であり層ごとに一定な正の有界な関数である。成層弾性流体の点震源による波動場の基礎方程式は次式で与えられる。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z') \delta(t) \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{r}$ は観測点、 $\mathbf{r}'$ はソース点と観測点の水平距離、 z は観測点の鉛直座標、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数を示す

3. 解析手法

過渡的 Green 関数の導出にあたり、まず Green 関数を離散化波数で表現すると次式で与えられる。ただし、 R は Green 関数を離散化波数表現するために設定した鏡像点までの水平方向の距離であり、また、 k_n は離散化波数、 N は離散化波数の集合を示す。

$$G(r, z, z', t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{k_n \in N} \frac{J_0(k_n r)}{(J_1(k_n R))^2} g_n(z, z', t) \quad (2)$$

本論文では、 $g_n(z, z', t)$ を因果性を満足するように、時間に関する Fourier 積分変換を用い、Fourier 逆変換での複素周波数平面での積分路を工夫して $g_n(z, z', t)$ の因果性が確保できるようにする。ここで、 $\hat{g}(z, z', \omega)$ は次式を満足する。

$$\left(\frac{d}{dz^2} + k_\alpha^2 - k_n^2 \right) \hat{g}(z, z', \omega) = -\delta(z - z') \quad (3)$$

ただし、 $k_\alpha = \omega/\alpha$ であり層ごとに一定の関数である。複素周波数平面では Green 関数の放射条件を確保するために branch cut を設定する (図2)。ここで、 B_p および B_n は $\omega > k_n \alpha_l$ 、 $\omega < -k_n \alpha_l$ を満足する実軸の branch cut の角振動数を表す。また、 P_p および P_n は $\hat{g}(z, z', \omega)$ における極を示す $\omega > 0$ 、 $\omega < 0$ を満足する実軸上の角振動数である。branch cut の上と下で半無限層での上向きの波と下向きの波が存在してくる。

次に $\hat{g}_n(z, z'; \omega)$ のスペクトル表現について結果を述べると、まず Green 関数の極の角振動数の集合を離散スペクトルとして、branch cut 上の角振動数を連続スペクトルと呼び、スペクトルの補集合をレゾルベント集合と定義する。これら離散・連続スペクトルに対応する固有関数 $\varphi_m(z), \psi_{\omega'}(z)$ を適用するとレゾルベント集合上での ω に対する、 $\hat{g}_n(z, z'; \omega)$ を固有関数で表現すると次式で与えられる。

$$\hat{g}(z, z', \omega) = \sum_{\omega_m \in P} a_m(z') \varphi_m(z) + \int_{B_p \cup B_n} b_{\omega'}(z') \psi_{\omega'}(z) d\omega' \quad (4)$$

¹ 〒278-8510 野田市山崎 2641, phone 04-7124-1501

キーワード: 過渡的 Green 関数, スペクトル表現, 離散・連続スペクトル

(4) について固有関数の直交関係式から Fourier 係数 a_m および b_ω が決定できる。次に、 $\hat{g}(z, z', \omega)$ の Fourier 逆変換を図3のように因果性を満足するように複素周波数平面で評価すると、因果性を満足する過渡的 Green 関数のスペクトル表現が次式で得られることになる。

$$g_n(z, z'; t) = \sum_{\omega_m \in P_p} \frac{\varphi_m(z) \varphi_m(z') \rho(z')}{\omega_m} \sin \omega_m t + \int_{\omega \in B_p} \frac{\psi_\omega(z) \psi_\omega(z') \rho(z')}{\omega} \sin \omega t \quad (5)$$

4. 数値解析

多層構造における過渡的 Green 関数のスペクトル表現について、半無限層と二層構造の場合を数値計算により確かめました。半無限層の場合は $\alpha=2[\text{km/sec}]$, $\rho=1[\text{g/cm}^3]$ として震源を unit step function で加震した場合の応答関数を鏡像解と比較した場合を図4に示した。これにより鏡像解とスペクトル表現が一致する事が確かめられる。次に二層構造の場合は $\alpha_1=2[\text{km/sec}]$, $\rho_1=1[\text{g/cm}^3]$ で $\alpha_2=3[\text{km/sec}]$, $\rho_2=1[\text{g/cm}^3]$ の場合について計算すると、分散関係は図5に示されており観測半径 (r) を $10[\text{km}]$, 観測深さ (z) を $2[\text{km}]$ ・震源深さ (z_0) を $4[\text{km}]$ ・表面層厚 (H) を $5[\text{km}]$ の場合について図6に示した。このグラフから、遅延条件による物理的因果性を満足している事が確認でき、分散関係からエアリー相による周期が約4秒であり過渡的 Green 関数のスペクトル表現の正しさが確認できる。

5. おわりに

本論文では、成層弾性流体の波動場における過渡的 Green 関数において物理的・数学的条件を満足するように複素周波数平面で評価し、離散・連続スペクトルの概念を導入して過渡的 Green 関数をスペクトル表現する事が可能である事が数値計算から確認できた。

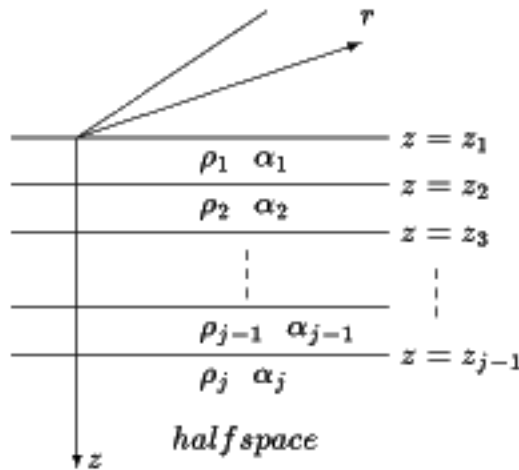


Fig1 Layered scalar wave field

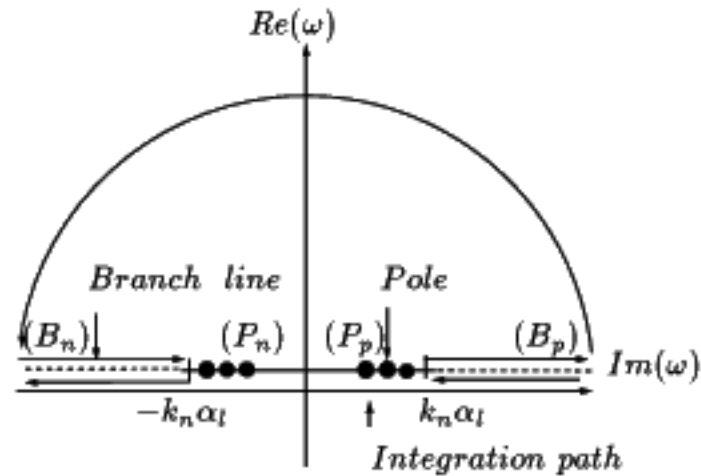


Fig2 Integration path in the complex ω -plane

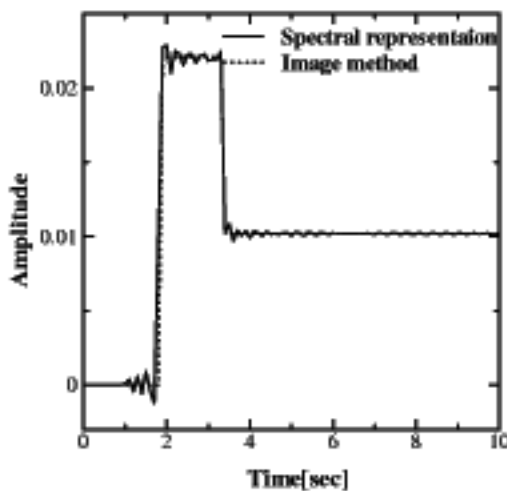


Fig3 Time-response of Green function for spectral representation

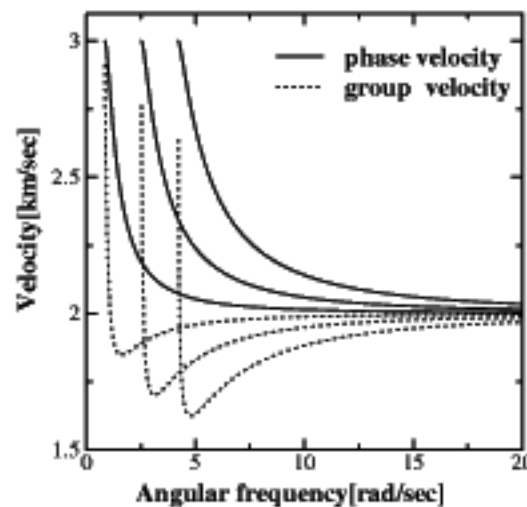


Fig4 Phase and group velocity curves

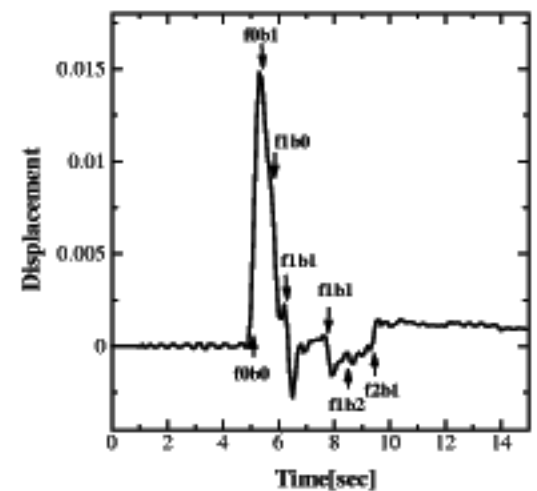


Fig5 Time-response of Green function for spectral representation