

## 弾性波動場散乱解析のための演算子的アプローチについての基礎的検討

東京理科大学大学院 理工学研究科 学生会員 小島 修  
東京理科大学 理工学部 正会員 東平光生

## 1. はじめに

従来、成層構造の波動場の解析は伝達マトリックス法が用いられてきた。しかしながら、この方法は各層ごとの材料特性が一定となる場合に利点のあるものである。本研究では、成層構造の材料特性が連続的に変化する場合の手法として演算子的なアプローチを試みた。

## 2. 解析手法

手法の検証の意味で剛基盤上の一次元 SH 波の波動場を考える。周波領域では次の Helmholtz 方程式が成立する。

$$\mu \left[ \frac{d^2}{dz^2} + k^2 + e(z) \right] G(z, z') = -\delta(z - z') \quad (1)$$

ただし、 $k$  は波数であり、 $e$  は媒質の揺らぎを表す深さ方向の関数である。媒質の揺らぎを無いとしたときの Green 関数を  $g(z, z')$  としたとき、式 (1) の解は次のような Lipmann-Schwinger 方程式<sup>1)</sup> (以下、L-S 方程式)として表現できる。

$$G(z, z') = g(z, z') + \int g(z, z'') e(z'') \mu G(z'', z') dz'' \quad (2)$$

この積分方程式では、 $g$  や  $e$  は与えられている。この方程式を演算子的に表現すると、次式となる。

$$[I - A]G = g$$

ここに  $I$  は恒等演算子、 $A$  は次で定義する積分演算子である。

$$A(\bullet) = \mu \int g(z, z'') e(z'') (\bullet) dz''$$

すなわち、形式的には式 (2) は、

$$G = [I - A]^{-1} g$$

と表現できるが、演算子のノルムが  $\|A\| < 1$  の時で、

$$G = \left( \sum_{j=0}^{\infty} A^j \right) g$$

となる。<sup>2)</sup>

## 3. 数値計算例

ここで解析するのは、図2に表される2つの不均質地盤モデルである。図2の媒質の揺らぎ(1)は  $e(z) = 0.01 \sin(\pi z / h)$  で与えてある。同図の媒質の揺らぎ(2)は、剛基盤上 15~35m で、伝播速度  $c=48.0\text{m/sec}$  を与えた。図3では、 $G(z, z')$  と、L-S 方程式の第一次近似 (Born 近似) との比較である。Born 近似は2次より高次の項を計算しないため、媒質の揺らぎが小さい時は  $G(z, z')$  との差は小さいもの

であるが、媒質の揺らぎが大きくなってくると、その精度が下がってしまうことが読み取れる。図4では、媒質の揺らぎ（2）を与えた時の伝達マトリックス法と、 $G(z, z')$ の解析結果を比較した。結果からは、若干の差異があるが、積分方程式の収束が読み取れる。

4. おわりに

演算子法を用いた波の散乱問題の解法について述べた。この方法の利点には媒質の定数の変化が連続的であっても可能であることである。ただし、媒質の揺らぎの大きなものは扱えないと考えられる。本研究では、1次元の波動について適用してきたが、これを発展させることで、より一般化された散乱問題解析への一つのステップになるであろう。

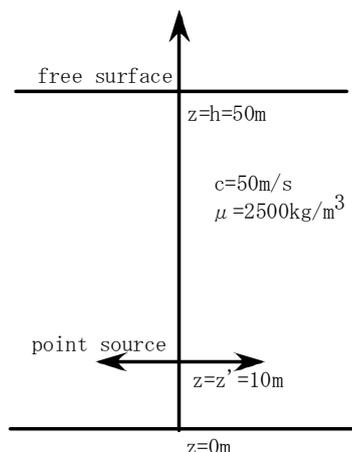


図1. モデル地盤

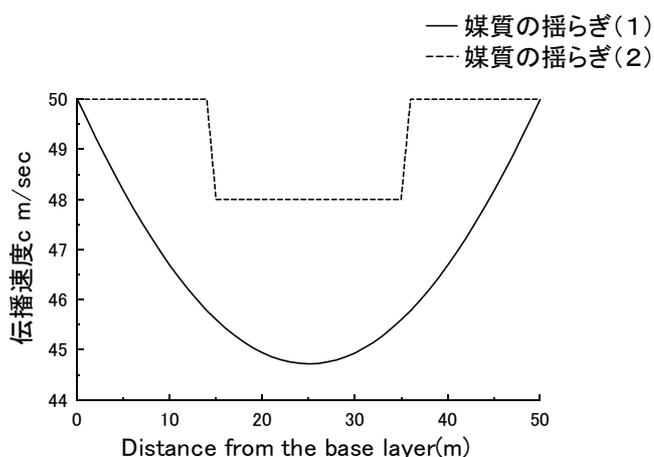


図2. 媒質の揺らぎ

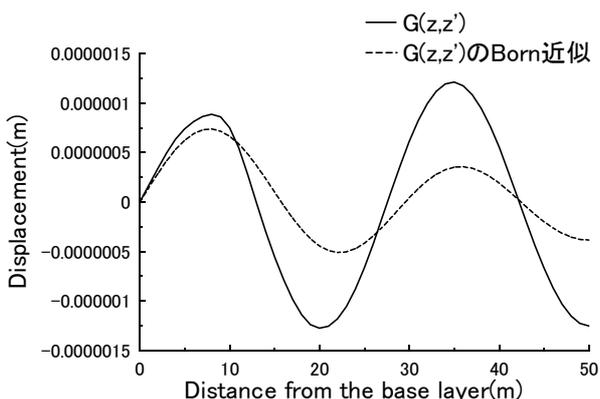


図3. 媒質の揺らぎ（1）を与えた時の  $G(z, z')$  と Born 近似の比較

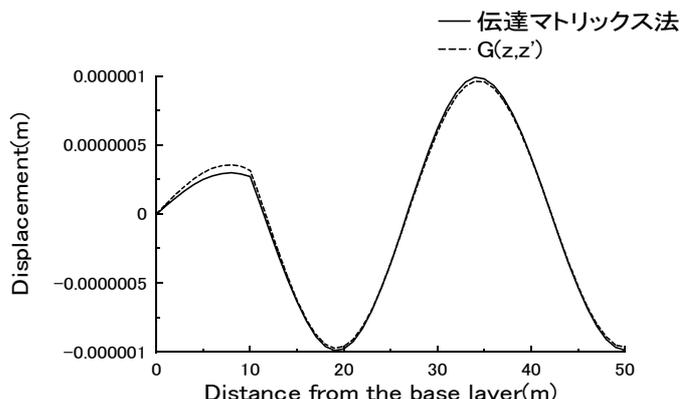


図4. 媒質の揺らぎ（2）を与えた時の伝達マトリックス法と  $G(z, z')$  の比較

参考文献

- 1) 今村 勤, 物理とグリーン関数, 岩波書店, 1981
- 2) 新井 朝雄, ヒルベルト空間と量子力学, 共立出版, 1998