# Spectral 確率境界要素法による二次元波動伝播解析

京都大学防災研究所　正会員　本田 利器

## 1.　はじめに

地震波の伝播媒体である地盤は，複雑な条件を有するが，その完全な情報を得ることは不可能であり，多くの不確定因子を有する．そのため，工学的な目的のためには，それらの不確定性を定量的に取り扱っていくことが重要である．ここでは，境界の幾何条件の不確定性を考慮することを例として，波動伝播解析に適用可能な手法として，Spectral 確率境界要素法を提案する．これは，Ghanem らが提案した Spectral 確率有限要素法で用いられているスペクトル分解の考え方に基づいて不確定性を解析する手法を，境界要素法に応用するものである．

## 2.　Spectral 確率境界要素法（Spectral Stochastic Boundary Element Method）

提案する Spectral 確率境界要素法（Spectral Stochastic Boundary Element Method，以下，SSBEM という）について述べる．SSBEM は，Ghanem ら[1)]により提案された Spectral 確率有限要素法と同様の考え方に基づき，境界の幾何的な不確定性を考慮した解析を行うものである．SSBEM では，不確定性を有する境界の位置を Karhunen-Loève 展開により展開し，また，解を Polynomial Chaos 展開された Homogeneous Chaos 空間への写像として求める．Spectral 確率有限要素法の詳細については，既報[1),2)]に譲り，ここでは，境界要素法への適用の定式化について簡潔に述べる．

### (1)　Karhunen-Loève 展開，Polynomial Chaos 展開

SSFEM では，不確定な場を Karhunen-Loève 展開（KL 展開）する．KL 展開では，対象とする確率過程を $s(x,\theta)$ として，これを，

$$s(x,\theta) = \bar{s}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\theta)\sqrt{\lambda_i} f_i(x) \quad \cdots (1)$$

と展開する．ここで，$x$ は空間座標位置; $\theta$ は確率空間における事象; $\bar{s}$ は $s$ の期待値; $f_i(x)$ は展開の基底関数; $\xi_i$ は正規直交性を有する独立 Gauss 確率変数をそれぞれ表わす．

また，SSFEM では，解の関数 $u(\theta)$ が，独立 Gauss 変数 $\xi_i(\theta)$ （$i = 1,..,\infty$，以下，$\xi_i$）の二乗可積分系の汎関数であるとして，これを Polynomial Chaos（Hermite 多項式汎関数）$\Psi_i[\{\xi_\ell\}]$ を用いて，次式のように展開する．

$$u(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i[\{\xi_\ell\}] \quad \cdots (2)$$

$\Psi_i[\{\xi_\ell\}]$ は，直交性を有し，これらの張る空間は Homogeneous Chaos（HC）と呼ばれる．PC の引数として，KL 展開で用いた Gauss 確率変数 $\xi_i(\theta)$ を用いることで，KL 展開した確率過程に対応する解を算出する．

### (2)　SSBEM の定式化

境界要素法では，境界の幾何条件や外力等の条件に基づき，例えば，任意の内点における変位 $u^i$ は，

$$u^i = \int_\Gamma q\bar{u}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma \bar{q}u\,\mathrm{d}\Gamma \quad \cdots (3)$$

と与えられる．今，境界の幾何条件を表わすパラメタ $\tau$ を導入する．$\tau$ が変化するときの変位 $u^i$ の変化は，上式を展開することで

$$u^i_\tau = \int_\Gamma \left\{1 + \tau\frac{D}{D\tau} + \left(\tau\frac{D}{D\tau}\right)^2 + \cdots\right\} q\bar{u}d\Gamma' - \int_\Gamma \left\{1 + \tau\frac{D}{D\tau} + \left(\tau\frac{D}{D\tau}\right)^2 + \cdots\right\} \bar{q}ud\Gamma \quad \cdots (4)$$

---

キーワード: 不確定性，境界要素法，波動伝播
連絡先: 〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄 Fax 0774-38-4067

と評価することができる．ここで $\dfrac{D}{D\tau}=\dfrac{\partial}{\partial\tau}+v\nabla$ は Lagrange 微分を表わす．$\tau$ を「時間」に類するパラメタとみなせば，$v$ は「速度の分布」に相当する関数である．ここで扱う問題では，パラメタ $\tau$ が変化することによる変化は境界の幾何条件のみであると仮定するから，$\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ の項は 0 となる．したがって，$\dfrac{D}{D\tau}=v\nabla$ である．また，$v$ としては，KL 展開で用いた関数 $f_i(x)$ を用いることができる．さらに，積分と微分の順序を交換して，

$$u^i_\tau=\int_\Gamma q\bar{u}\mathrm{d}\Gamma'+\tau v\nabla\int_\Gamma q\bar{u}\mathrm{d}\Gamma'+(\tau v\nabla)^2\int_\Gamma q\bar{u}\mathrm{d}\Gamma'+\cdots-\left\{\int_\Gamma \bar{q}u\mathrm{d}\Gamma+\tau v\nabla\int_\Gamma \bar{q}u\mathrm{d}\Gamma+(\tau v\nabla)^2\int_\Gamma \bar{q}u\mathrm{d}\Gamma+\cdots\right\} \quad (5)$$

と得られる．この式を SSFEM と同様に，$u^i$ を PC 展開した空間上での近似として解くことで解が得られる．なお，ここで提案する SSBEM では，式 (5) の $\tau$ の 2 次項までを考慮して解析を行うものとする．この場合，$\tau$ についての 2 次項が非線形性を有することになるが，Ghanem らが提案した Spectral approach はこのような非線形性を有する問題に対しても適用可能であるため，問題なく解くことができる．

## 3. 解析例

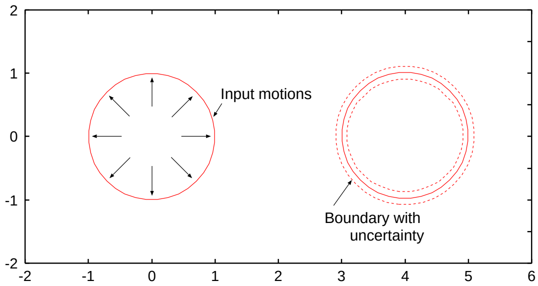
ここでは，2 次元の全無限媒体内に隣接する二つの円孔がある単純なモデルを考える．円孔の配置は**図–1** に示されている．なお，BEM による解析では一つの円孔は 36 要素に分割した．円孔のひとつには内側から時間的に変化する外力が作用しているものとし，もう一つの円孔は自由境界となっている．ただし，2 つめの円孔の幾何形状には不確定性があるものとした．円孔の形状については，期待値が半径 $R=1$ の円であり，その中心からの距離 $r$ が，$\gamma=0.02, c=2.0/\pi$ として，

$$C(\theta_1,\theta_2)=(\gamma\bar{R})\exp\{-c(|\theta_1-\theta_2|)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

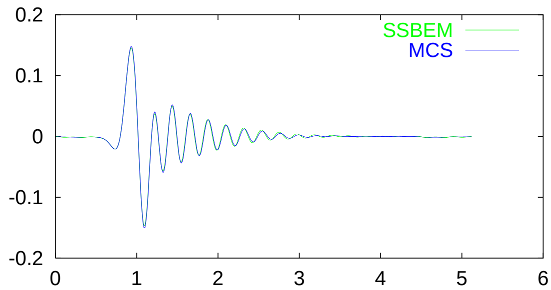
という相関係数を有する不確定場となっているものとする．入力としては Ricker wavelet を一つめの円孔の内側に均等に作用させた．

SSBEM の精度を検討するため，同手法の計算結果を，250 回の試行を行ったモンテカルロシミュレーションと比較する．SSBEM では，KL 展開次数 2，HC 展開次数 2 とした．

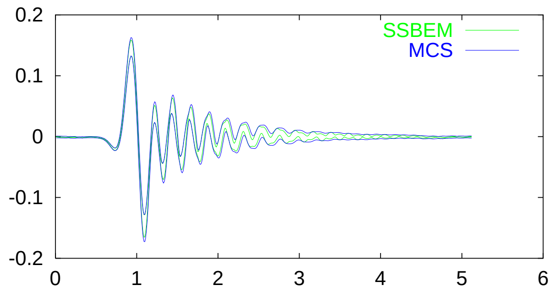
MCS により得られた結果と SSBEM により得られた結果の比較として，点 (60,0) における変位の $y$ 成分の時刻歴の平均値とばらつきの幅（平均値±標準偏差）について，両者を比較したものを**図–2** に示す．SSBEM により得られた値は，MCS の結果を概ね近似している結果となった．




**図–1** 対象とする問題




(a) 変位の期待値の時刻歴




(b) 変位のばらつき（$\pm1\sigma$）の時刻歴

**図–2** MCS と SSBEM により得られた結果の比較

## 4. おわりに

境界の幾何形状が不確定性を有する問題に対する数値解析手法として，Spectral 確率境界要素法（SSBEM）を提案した．検証のため，開発した SSBEM を，比較的単純なモデルを対象とした数値計算に適用し，概ね妥当な結果を得た．ただし，現状では，解析はかなり不安定であるため，その改善が今後の課題として挙げられよう．

## 参考文献

1) Roger G. Ghanem, Pol D. Spanos : Stochastic Finite Elements – A Spectral Approach ,Springer-Verlag NY, 1991
2) 本田利器：スペクトル確率有限要素法によるランダム場の波動伝播解析, 土木学会論文集 No.689/I-57, pp.321–331, 10.2001