半無限移動境界値問題の一解析法

北海道大学　学生会員　○浅井　孝徳
北海道大学　フェロー　三上　隆
北海道大学　正会員　蟹江　俊仁

１．はじめに

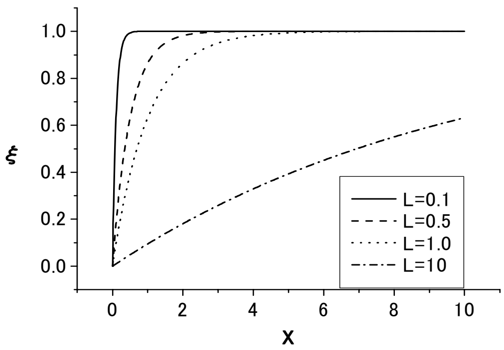
半無限領域で定義される移動境界値問題は、多くの現実の問題に現れる。無限領域の問題の解法は大別して２つの方法が考えられる。第１の方法は外部境界が遠くではあるが有限の距離に固定し、その境界までの領域だけを離散化するものである。この方法は、多数の離散点が必要であり、また十分遠い所としてどの程度の距離の所を選べばよいかという問題が生じるが、実際的な解法としてよく用いられる。第２の方法は、直接的に無限遠に広がる領域を扱うものである。ここでは、後者の方法を取り上げ、移動境界値問題を対象にした半無限領域を有限領域に写像する方法の適用可能性の基本的な検討を行った。

２．写像

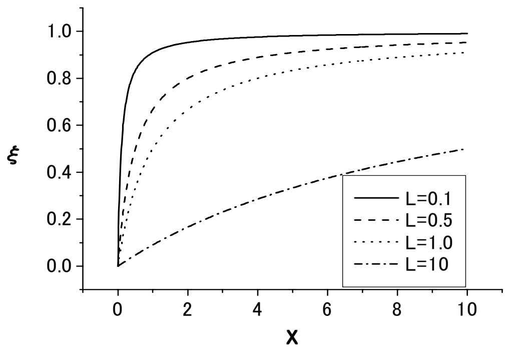
半無限領域 $(0 \le x < \infty)$ を有限領域 $(0 \le \xi < 1)$ に写像する方法に指数写像（exponential map）と代数写像（algebraic map）を用いる[1)]。

指数写像：$\xi = 1 - e^{-x/L}$　・・・・・・（１）　　代数写像：$\xi = x/(L + x)$　・・・・・・（２）

ここで、L は $\xi=1$ への収束の度合いを表す尺度であり、その様子を図－１および図－２に示す。この図より、L の値が小さい程 $\xi=1$ への収束は早く、また L＝一定では、指数写像の方が代数写像よりも $\xi=1$ への収束が早いことがわかる。



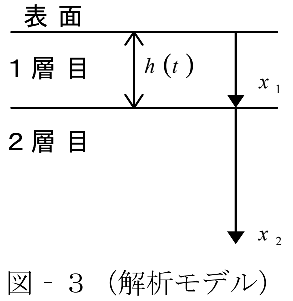
図－１（x と ξ の関係、指数写像）



図－２（x と ξ の関係、代数写像）

３．移動境界値問題への適用

解析モデルを図－３に示す。支配方程式および境界条件，連続条件を以下のようにおく。ただし、式（９）に用いられている LH は潜熱を表している。



支配方程式：$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1^2} \quad \cdots\cdots (3) \qquad \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x_2^2} \quad \cdots\cdots (4)$$

境界条件：$$x_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = T_1 \quad \cdots\cdots (5) \qquad x_2 = \infty \Rightarrow \theta_2 = T_2 \quad \cdots\cdots (6)$$

連続条件：$$x_1 = h(t) \Rightarrow \theta_1 = T_m \quad \cdots\cdots (7) \qquad x_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = T_m \quad \cdots\cdots (8)$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \right)_{x_1 = h(t)} - \lambda_2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right)_{x_2 = 0} = LH \frac{dh}{dt} \quad \cdots\cdots (9)$$

図－３（解析モデル）

キーワード　半無限領域，移動境界値問題，近似解法，写像

連絡先　〒060-8628　北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目　北海道大学工学部研究科　ＴＥＬ011-706-6174

式（３）および式（４）の解法には、空間領域を選点法[2]を用いて、時間領域をCrank-Nicolson差分式を用いてそれぞれ離散化させる。そこで、写像変換するための式を以下のようにおく。

１層目：$\xi = x_1 / h(t)$　・・・・・・（10）　　２層目：$\eta = 1 - e^{-x_2/L}$　・・・・・・（11）

これを用いて式（３）および式（４）を変換する。ただし、$\dot{h}(t) = \{h(t) - h(t-\Delta t)\}/\Delta t$ とする。

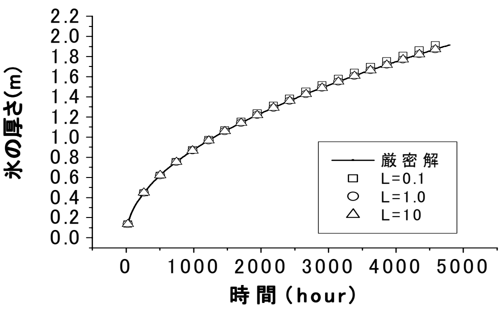
$$\text{１層目：}\frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \frac{a_1}{h(t)^2}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\xi^2} + \xi\frac{\dot{h}(t)}{h(t)}\frac{\partial\theta_1}{\partial\xi} \quad \cdots\cdots (12)$$

$$\text{２層目：}\frac{\partial\theta_2}{\partial t} = \frac{a_2}{L^2}(1-\eta)^2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\eta^2} + \frac{1-\eta}{L}\left(\dot{h}(t) - \frac{a_2}{L}\right)\frac{\partial\theta_2}{\partial\eta} \quad \cdots\cdots (13)$$

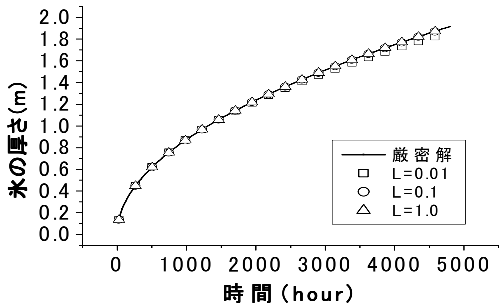
ここで式（12）および式（13）には$h(t)$および$\dot{h}(t)$が含まれているため、Δt後の１層目の厚さhについて推定する必要がある。式（９）を用いて厚さhについて推定することができる。なお、この推定した値については収束するまで繰り返し計算を行い、ある程度収束した値をΔt後の１層目の厚さhとして決定している。

４．計算例

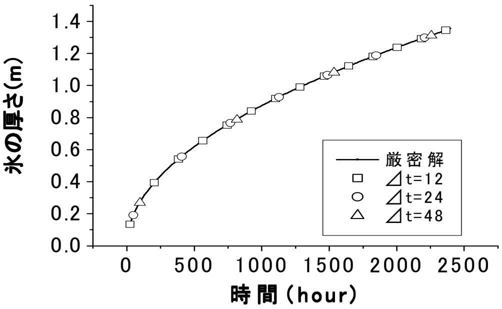
計算に用いた値は、a_1=4.53×10^{-3}[m^2/hour]，a_2=4.73×10^{-4} [m^2/hour]，T_1=−20[℃]，T_2=10[℃]，T_m=0[℃]，λ_1=1.91[kcal/(m･hour･℃)]，λ_2=0.48[kcal/(m･hour･℃)]，LH=8.08×10^4 [kcal/m^3]である。さらに、選点数を11個、Δt=24[hour]においている。図－４および図－５は、指数写像および代数写像の結果を示している。これによればLの値によらず厳密解[3]に一致することがわかった。また、図－６および図－７は選点数を11個、L=1.0においた場合のΔtの値による変化を示している。この場合についてもΔtの値によらず厳密解に一致することがわかった。



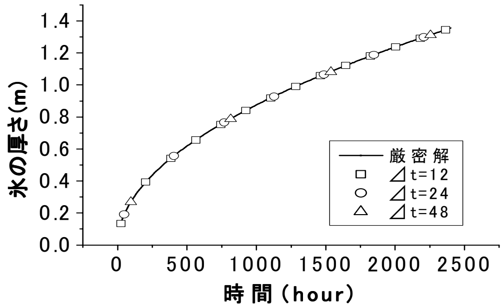
図－４（Lを変化させた場合、指数写像）



図－５（Lを変化させた場合、代数写像）



図－６（Δtを変化させた場合、指数写像）



図－７（Δtを変化させた場合、代数写像）

５．まとめ

本研究では、半無限領域で表された移動境界値問題において有限領域に写像させた解法の応用例として氷の生成について検討してみた。これによると指定する近似解法は良好な結果を与えることが証明された。

参考文献

１）C. Canuto et al.：Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 1986.

２）T. Mikami and J. Yoshimura：Structural Eng. / Earthquake Eng., Vol.7, No.2, 1990.

３）西川兼康，藤田恭伸：伝熱学，理工学社，1988