

3次元弾性散乱解析への多重極積分方程式法の適用

京都大学工学研究科 正会員 ○吉田研一
京都大学工学研究科 正会員 西村直志

1 序

境界積分方程式法は係数行列が密になることから、その適用は案外小さい問題に限られてきた。ところが、多重極展開を用いた境界積分方程式の高速解法が Rokhlin により提案され [1]、大規模な問題の解析が可能になってきた。3次元の周波数域動弾性解析は Fujiwara[4] や吉田ら [5, 6] による研究がある。Fujiwara は多重極展開を行なうのに6個のモーメントを用いているのに対し、吉田らは4個のモーメントを用いている。本報では Burton&Miller[7] の積分方程式を用いた3次元弾性散乱解析に Rokhlin の Diagonal form[2] 及び吉田ら [5, 6] の多重極展開を用いて多重極法の適用を試みる。

2 積分方程式

今、3次元無限領域の中に、滑らかな境界 S を有する外部領域 D があるとする。3次元弾性散乱問題は次の境界値問題の解を求めることに帰着される。

$$(\Delta_{ik}^* + \rho\omega^2\delta_{ik})u_k = 0 \text{ in } D, \quad t_i = \hat{t}_i \text{ on } S_1, \quad u_i = \hat{u}_i \text{ on } S_2 \quad (S_1 \cup S_2 = S, S_1 \cap S_2 = \emptyset)$$

ここに Δ_{ik}^* は Navier の演算子、 ω は周波数、 u_i は変位、 t_i はトラクションである。入射波を u_i^I とすると、この問題での積分方程式は次のようになる。

$$u_i^I(x) = \frac{1}{2}u_i(x) - \int_S \Gamma_{ij}(x, y)t_j(y)dS + \oint_S \Gamma_{ij}(x, y)u_j(y)dS, \quad x \in S$$

しかし、この積分方程式には、周波数域動弾性問題の見かけの固有値の問題がある。これを回避するために Burton & Miller[7] の方法に従って、次の積分方程式を考える。

$$u_i^I(x) + \alpha t_i^I(x) = \frac{1}{2}u_i(x) + \frac{1}{2}\alpha t_i(x) - \int_S \Gamma_{ij}(x, y)t_j(y)dS + \oint_S \Gamma_{ij}(x, y)u_j(y)dS \\ - \alpha \oint_S T_{im}(x)\Gamma_{mj}(x, y)t_j(y)dS + \alpha \oint_S T_{im}(x)\Gamma_{mj}(x, y)u_j(y)dS, \quad x \in S \quad (1)$$

ここでは、式 (1) が解くべき積分方程式となる。式 (1) において、 α は虚部が0でない任意の複素数であり、 $T_{im}(x)$ はトラクション作用素、 Γ_I は2重層核で基本解 Γ を用いてそれぞれ次のように表される。

$$T_{ij}(x) \equiv n_m(x)C_{imjl}\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad \Gamma_{ij}(x, y) = T_{jm}(y)\Gamma_{im}(x, y) \quad (2)$$

また、3次元周波数域動弾性方程式の基本解 Γ は

$$\Gamma_{ij}(x, y) = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{e^{ik_T r}}{r} \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left(\frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_L r}}{r} \right) \right), \quad r = |x - y| \quad (3)$$

であり、 k_L, k_T は縦波及び横波の波数を表す。

3 多重極モーメント及び局所展開係数

多重極法では遠方の境界要素からの境界積分への寄与を多重極モーメントと局所展開係数を用いて効率良く計算する。つまり、多重極積分方程式法では観測点とソース点が離れている場合を想定して定式化が行なわれる。

キーワード: BIEM; FMM; Diagonal form

連絡先: 〒606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL: 075-753-5115 FAX: 075-753-5066

まず，3次元周波数域動弾性方程式の基本解 (3) を次のように書き換える．

$$\Gamma_{ip}(x, y) = \frac{1}{4\pi\mu k_T^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_p} \frac{e^{ik_L r}}{r} + e_{rqi} e_{rsp} \frac{\partial}{\partial x_q} \frac{\partial}{\partial y_s} \frac{e^{ik_T r}}{r} \right), \quad r \neq 0 \quad (4)$$

次に3次元 Helmholtz の基本解の積分表示

$$\frac{e^{ikr}}{4\pi r} = \frac{ik}{16\pi^2} \int_{S^0} e^{ik\hat{\mathbf{k}} \cdot \overrightarrow{xx_0}} \mathcal{T}(k, \hat{\mathbf{k}}, \overrightarrow{y_0 x_0}) e^{ik\hat{\mathbf{k}} \cdot \overrightarrow{y_0 y}} dS_{\hat{\mathbf{k}}}, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}| < |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0| \quad (5)$$

を用いる． $\hat{\mathbf{k}}$ は次のような単位ベクトルを意味し，

$$(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta), \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi),$$

式 (5) の積分は単位球面 S^0 での積分を意味する．また， $\mathcal{T}$ は次のように表される．

$$\mathcal{T}(k, \hat{\mathbf{k}}, \overrightarrow{y_0 x_0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{i^n} h_n^{(1)}(k|\overrightarrow{y_0 x_0}|) P_n \left(\frac{\overrightarrow{y_0 x_0}}{|\overrightarrow{y_0 x_0}|} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right) \quad (6)$$

ここに， $h_n^{(1)}$, P_n はそれぞれ球 Hankel 関数，Legendre 関数を表す．

上記の積分表示 (5) を用いると x から十分離れた S の部分 S_y から式 (1) の右辺の積分への寄与は，次のように評価することが出来る．

$$\begin{aligned} & - \int_{S_y} \Gamma_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) dS_y + \int_{S_y} \Gamma_{Iij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) dS_y \\ & - \alpha \int_{S_y} T_{im}(\mathbf{x}) \Gamma_{mj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) dS_y + \alpha \int_{S_y} T_{im}(\mathbf{x}) \Gamma_{Imj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) dS_y \\ & = \frac{1}{16\pi^2 k_T^2 \mu} \left(\int_{S^0} (\delta_{im} + \alpha T_{im}(x)) E_{rm}^T(\hat{\mathbf{k}}, \overrightarrow{xx_0}) L_r^T(\hat{\mathbf{k}}; x_0) dS_{\hat{\mathbf{k}}} + \int_{S^0} (\delta_{im} + \alpha T_{im}(x)) E_m^L(\hat{\mathbf{k}}, \overrightarrow{xx_0}) L^L(\hat{\mathbf{k}}; x_0) dS_{\hat{\mathbf{k}}} \right) \\ & \quad \left(E_{ri}^T(\hat{\mathbf{k}}, \overrightarrow{ox}) = k_T e_{rsi} \hat{k}_s e^{ik_T \hat{\mathbf{k}} \cdot \overrightarrow{ox}}, \quad E_i^L(\hat{\mathbf{k}}, \overrightarrow{ox}) = k_L \hat{k}_i e^{ik_L \hat{\mathbf{k}} \cdot \overrightarrow{ox}} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

ここに， L^L, L_r^T は x_0 を展開中心とする局所展開係数であり， y_0 を展開中心とする多重極モーメント M^L, M_r^T を用いて次のように書ける．

$$L^L(\hat{\mathbf{k}}; x_0) = \mathcal{T}(k_L, \hat{\mathbf{k}}, \overrightarrow{y_0 x_0}) M^L(\hat{\mathbf{k}}; y_0), \quad L_r^T(\hat{\mathbf{k}}; x_0) = \mathcal{T}(k_T, \hat{\mathbf{k}}, \overrightarrow{y_0 x_0}) M_r^T(\hat{\mathbf{k}}; y_0). \quad (8)$$

また，多重極モーメント M^L, M_r^T は次のように積分で表される．

$$M^L(\hat{\mathbf{k}}; y_0) = \int_{S_y} -E_j^L(\hat{\mathbf{k}}, \overrightarrow{y_0 y}) t_j(y) + T_{jm}(y) E_m^L(\hat{\mathbf{k}}, \overrightarrow{y_0 y}) u_j(y) dS_y \quad (9)$$

$$M_r^T(\hat{\mathbf{k}}; y_0) = \int_{S_y} -E_{rj}^T(\hat{\mathbf{k}}, \overrightarrow{y_0 y}) t_j(y) + T_{jm}(y) E_{rm}^T(\hat{\mathbf{k}}, \overrightarrow{y_0 y}) u_j(y) dS_y, \quad (10)$$

式 (8)-(10) 及び M2M, L2L 公式 [6] を用いて多重極法のアルゴリズム [3] に従って積分 (7) の評価をする．実際の数値解析例については当日発表する．

参考文献

- [1] V. Rokhlin : Rapid solution of integral equations of classical potential theory, J. Comp. Phys., 60 , 1985, pp.187-207.
- [2] V. Rokhlin : Diagonal forms of translation operators of the Helmholtz equation in three dimensions, *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, 1, 82-93, 1993.
- [3] Leslie Greengard : The rapid evaluation of potential fields in particle systems , The MIT Press 1987
- [4] H. Fujiwara : The fast multipole method for solving integral equations of three-dimensional topography and basin problems, *Geophys. J. Int.*, 140, 198-201, 2000.
- [5] 吉田研一，西村直志，小林昭一：多重極積分方程式法を用いたクラックによる3次元弾性波動散乱問題の解析，土木学会 応用力学論文集，3, 143-150, 2000.
- [6] K. Yoshida, N. Nishimura and S. Kobayashi : Application of a diagonal form fast multipole BIEM to the analysis of three dimensional scattering of elastic waves by cracks *Trans. JASCOM*, 18, 77-80, 2001.
- [7] A.J. Burton and G.F. Miller : The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 323, 201-210, 1971.