線形化逆散乱解析の一高速化手法

東北大学大学院　学生員　中畑和之
東北大学大学院　正　員　北原道弘

1　はじめに

構造部材中の欠陥形状を再構成する線形化逆散乱解析法 [1] の基本アルゴリズムは，散乱波形が有する位相情報を保持しながら波数ベクトル空間内で積分することにある．本研究ではこの逆散乱アルゴリズムとフーリエ変換との相似性に着目し，高速フーリエ変換 (FFT) を利用した逆散乱解析の高速化を試みる．

2　線形化逆散乱法

均質等方な 2 次元弾性体 D 内に空洞 D^c が存在しているものとする．ここでは測定境界面上に設置した探触子によって縦波入射波 $\boldsymbol{u}^0$ を送信し，欠陥空洞 D^c によって散乱された散乱波 $\boldsymbol{u}^{sc}$ を同じ位置の探触子で受信するパルスエコー法を採用する．散乱波 $\boldsymbol{u}^{sc}$ の縦波成分から探触子方向 $\hat{\boldsymbol{y}}$ の縦波散乱振幅 $\boldsymbol{A}(k_L,\hat{\boldsymbol{y}})\cdot\hat{\boldsymbol{y}}$ を抽出し，この縦波散乱振幅から逆に材料内部の欠陥形状を推定する逆解析手法 [1] として，ボルン逆解析とキルヒホフ逆解析が提案されている．本報告では，以下にキルヒホフ逆解析の高速化手法について要約する．

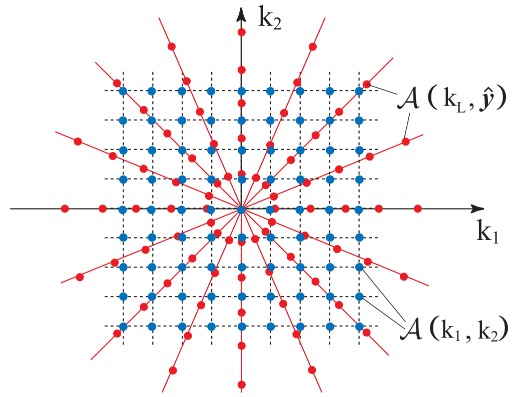
キルヒホフ近似を導入して線形化した縦波散乱振幅は次式で表される．

$$\boldsymbol{A}(k_L,\hat{\boldsymbol{y}}) = -\frac{u^0 k_L}{2}\hat{\boldsymbol{y}}\int_D \gamma(\boldsymbol{x})e^{-2ik_L\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{x}}dV(\boldsymbol{x}) \quad (1)$$

ここで u^0 は入射波の振幅，k_L は縦波波数であり，$\gamma(\boldsymbol{x})$ は入射波が直接到達する境界部分で値をもつ特異関数である．いま，$\boldsymbol{K}=2k_L\hat{\boldsymbol{y}}$ と定義すると，上式右辺の積分は，特性関数 $\gamma(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{K}$–空間におけるフーリエ変換像であることがわかる．従って，欠陥の位置と形状を表す特異関数 $\gamma(\boldsymbol{x})$ は散乱振幅 $\boldsymbol{A}(k_L,\hat{\boldsymbol{y}})$ の逆フーリエ変換として次式のよう表すことができる．

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint \frac{-8}{u^0 k_L}\mathcal{A}(k_L,\hat{\boldsymbol{y}})e^{2ik_L\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{x}}k_L dk_L d\hat{\boldsymbol{y}} \quad (2)$$

ここで $\mathcal{A}(k_L,\hat{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{A}(k_L,\hat{\boldsymbol{y}})\cdot\hat{\boldsymbol{y}}$ であり，図–1 において $\boldsymbol{K}$–空間の原点を通る放射線 (赤の実線) 上に分布する．実際には，計測された離散データ $\mathcal{A}(k_L,\hat{\boldsymbol{y}})$ を用いて，式 (2) における $\boldsymbol{K}$–空間の積分を数値的に実行することで欠陥形状が再構成される．この逆解析アルゴリズムがフーリエ変換 (FT) に基づくことに着目すると，離散フーリエ変換 (DFT) を高速実行する高速フーリエ変換 (FFT) が利用でき，逆解析の実行時間の短縮が可能である．



図–1 **K**–空間における計測値 $\mathcal{A}$(●) とその補間点 (●)

3　離散フーリエ変換

3.1　離散化

まず $\boldsymbol{K}$–空間の極座標系 $(k_L,\hat{\boldsymbol{y}})$ を直交座標系 (k_1,k_2) に変換すると式 (2) は次式のようになる．

$$\gamma(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi^2}\iint \tilde{\mathcal{A}}(k_1,k_2)e^{i2(k_1x_1+k_2x_2)}dk_1dk_2 \quad (3)$$

ここで，$\tilde{\mathcal{A}}(k_1,k_2) = \frac{-2}{u^0\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\mathcal{A}(k_1,k_2)$ である．次に FFT を適用するために，便宜上 $k_1=\pi k_1', k_2=\pi k_2'$ として式 (3) を次式のように書き換える．

$$\gamma(x_1,x_2) = \iint \tilde{\mathcal{A}}(k_1',k_2')e^{i2\pi k_1'x_1}e^{i2\pi k_2'x_2}dk_1'dk_2' \quad (4)$$

以上の逆フーリエ変換は再構成領域 (x_1,x_2) および $\boldsymbol{K}$–空間 (k_1,k_2) において全範囲を解析領域とするが，DFT を適用することで，有限な範囲の離散計測データが利用できる．実際の計測データ $\mathcal{A}(k_L,\hat{\boldsymbol{y}})$ は，図–1 において赤丸 ● で示される離散点に分布する．DFT を用いるために，図–1 に青丸 ● で示されるような格子点での離散データ $\mathcal{A}(k_1,k_2)$ が必要であるので，ここでは計測された赤丸点のデータから内挿法によって DFT に必要な青丸点のデータを補間する．ここで $\boldsymbol{K}$–空間において $N_1\times N_2$ のデータをサンプリングするとすれば，$\boldsymbol{K}$–空間の離散データ $\tilde{\mathcal{A}}(m_1,m_2)$ に対

キーワード：超音波，形状再構成，線形化逆散乱解析，高速フーリエ変換
〒980-8579　仙台市青葉区荒巻字青葉 06,　TEL 022-217-7126, FAX 022-217-7127　URL: http://www.nde.civil.tohoku.ac.jp/

する再構成領域 $\gamma(n_1,n_2)$ は，式 (4) の 2 次元 FT に対応して次式の 2 次元 DFT によって求めることができる．

$$\gamma(n_1,n_2)=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\sum_{m_2=0}^{N_2-1}\tilde{\mathcal{A}}(m_1,m_2)W_{N_1}^{n_1m_1}W_{N_2}^{n_2m_2}$$
$$(\,0\le n_1\le N_1-1,\quad 0\le n_2\le N_2-1\,)\quad(5)$$

ここで，$W_{N_1}=\exp(2\pi i/N_1)$，$W_{N_2}=\exp(2\pi i/N_2)$ であり，N_1,N_2 は FFT の高速化の制約から 2 のべき乗が採用される．

いま，$\boldsymbol{K}$–空間のサンプリング間隔を Δk，最高波数を k_{max} とすると，再構成領域の間隔 Δx とは

$$\Delta x_\alpha=\frac{\pi}{N_\alpha\cdot\Delta k_\alpha}=\frac{\pi}{2k_{max}}\qquad(\alpha=1,2)\qquad(6)$$

の関係がある．上式中の π は，式 (4) で $k=\pi k'$ と置いたことに起因する．k_{max} が大きい，すなわち広帯域の計測データを用いて逆解析することは，再構成領域の空間分解能が向上することを意味している．以下では，この 2 次元 DFT を高速に実行するための 2 次元 FFT について述べる．

3.2　2 次元高速フーリエ変換

式 (5) で示される 2 次元 DFT の m_1 および m_2 方向に着目すると，2 次元 DFT を 1 次元 DFT の繰り返しと解釈することができる．この性質に基づき，ここでは 1 次元 FFT を繰り返し使用して 2 次元 FFT を構成した行-列分解法 [2] を採用する．まず，式 (5) は次式のように書き直すことができる．

$$\gamma(n_1,n_2)=\frac{1}{N_1}\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\left[\frac{1}{N_2}\sum_{m_2=0}^{N_2-1}\tilde{\mathcal{A}}(m_1,m_2)W_{N_2}^{n_2m_2}\right]W_{N_1}^{n_1m_1}$$
$$(\,0\le n_1\le N_1-1,\quad 0\le n_2\le N_2-1\,)\quad(7)$$

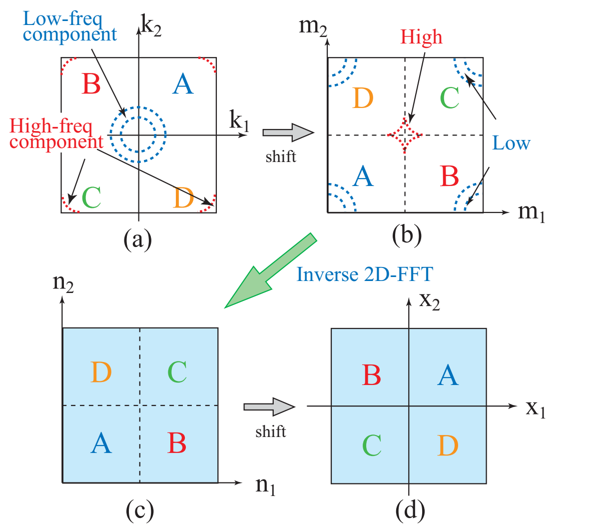
ここで上式の右辺の括弧内は，m_1 固定の下では $n_2=1,2,\cdots,N_2-1$ に対する 1 次元 DFT と解釈することができる．いま，これを

$$\tilde{\mathcal{B}}(m_1,n_2)=\frac{1}{N_2}\sum_{m_2=0}^{N_2-1}\tilde{\mathcal{A}}(m_1,m_2)W_{N_2}^{n_2m_2}\qquad(8)$$

とおくと，2 次元 DFT は次式のように表される．

$$\gamma(n_1,n_2)=\frac{1}{N_1}\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\tilde{\mathcal{B}}(m_1,n_2)W_{N_1}^{n_1m_1}\qquad(9)$$

以上の計算は，初めに 1 次元の N_2 点 DFT を各 m_1 に対して合計 N_1 回計算し，$\tilde{\mathcal{B}}(m_1,n_2)$ を求めた後，求められた $\tilde{\mathcal{B}}(m_1,n_2)$ を用いて 1 次元の N_1 点 DFT を各 n_2 に対して合計 N_2 回計算する．このように 2 次元 DFT を 1 次元 DFT の計算に帰着させた後，この 1 次元 DFT を 1 次元 FFT アルゴリズムに基づいて計算する．



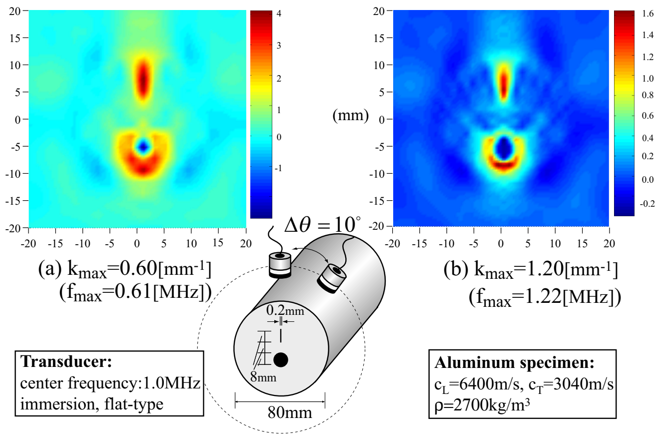
図– 2　2 次元 FFT を用いた K–空間からの再構成手順

4　逆解析手順

図–2 に縦波散乱振幅 $\mathcal{A}(k_L,\hat{\boldsymbol{y}})$ から欠陥の再構成像への変換手順を示す．図–2(a) は計測された散乱振幅の $\boldsymbol{K}$–空間の配置 $\tilde{\mathcal{A}}(k_1,k_2)$ を表している．この配置では四隅に高周波成分が分布し，低周波成分は中心に配置される．ここで離散化の際の折り返し波数 [3] の発生を考慮して，原点を折り返し波数の位置にとって，正負の波数空間成分が連続するように配置を入れ替える (図–2(b))．その後，**3.2** で示した 2 次元 FFT を実行すると，再構成領域における配置 $\gamma(n_1,n_2)$ を得る (図–2(c))．さらにこの配置の順序を元に戻すと欠陥像 $\gamma(x_1,x_2)$ が再構成される (図–2(d))．

5　欠陥の再構成結果

2 次元 FFT を用いて，計測波形から欠陥像を再構成した結果を図–3 に示す．欠陥再構成像は，使用周波数（波数）が高いほど鮮明であることがわかる．



図– 3　キルヒホフ逆解析による欠陥像の再構成

参考文献

[1] 中畑和之, 北原道弘: 計測波形による欠陥形状の再生と使用周波数帯域に関する考察, 応用力学論文集, 3, 91–98(2000).

[2] 佐川雅彦, 貴家仁志: 高速フーリエ変換とその応用, 昭晃堂 (1992).

[3] 谷口慶治　編: 画像処理工学　基礎編, 共立出版 (1996).