

多孔質弾性体における波動伝播の数値解析

東北大学 正会員 山本 晃司
 東北大学 正会員 北原 道弘

Biot の定式化¹⁾に基づくと流体で飽和した多孔質弾性体における波動伝播には、1)横波と二成分の縦波の存在、2)固体・流体間の摩擦による散逸、3)散逸を原因とする波速の分散性、という特徴がある。ここでは、Biot の有効応力定数(α)と散逸に関するパラメータの、波数と境界要素法で得られた散乱問題の解への影響を示す。

1. 多孔質弾性体の弾性波伝播

多孔質弾性体の波速を支配するパラメータ²⁾は、骨格部の非排水条件における Lamé 定数: μ, λ_u , Biot の定数: α , Biot の弾性定数: M , 孔隙率 β , 全体及び流体の密度: ρ, ρ_f , ならびに散逸を支配する流体の動粘性定数 η 及び固体の浸透率 k である。

運動方程式には固体の変位 u_i , 全応力 σ_{ij} , 流体圧力 p , 流体と固体の相対変位 w_i の四つの変数が表れ、次のように書ける。

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \quad (1)$$

$$p_{,i} + \rho_f c_i = -\rho_f \ddot{u}_i - \frac{\rho_f}{\beta} \ddot{w}_i - \frac{\eta}{k} \dot{w}_i \quad (2)$$

ここで、 b_i, c_i は全体及び流体部分に加わる物体力を示す。運動方程式に構成則と適合則を代入して全応力と流体の流入量の項を消去すると、角周波数 ω の波動に関する運動方程式は次の通りである。

$$\begin{aligned} \mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda_u - \alpha^2 M) u_{j,ji} + \omega^2 \tilde{\rho} u_i - \tilde{\alpha} p_{,i} \\ + \left(\rho b_i + \frac{\rho_f}{\tilde{m}} c_i \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\omega^2 \tilde{m}} p_{,kk} + \frac{1}{M} p + \tilde{\alpha} u_{i,i} + \frac{\rho_f}{\omega^2 \tilde{m}} c_{i,i} = 0 \quad (4)$$

物体力の無い系の平面波の伝播を考えて、変位の向きが伝播方向と直交する条件（横波）と、一致する条件（縦波）を (3), (4)式に代入して得た特性方程式から、横波波数(k_T)

$$k_T^2 = \frac{\tilde{\rho}}{H'} \quad (5)$$

二成分の縦波（S波, F波）の波数(k_S, k_F)

$$(k_S^2, k_F^2) = \frac{1}{2} \left[(k_{F_0}^2 + k_{S_0}^2 + k_Q^2) \pm \left\{ (k_{F_0}^2 + k_{S_0}^2 + k_Q^2)^2 - 4k_{F_0}^2 k_{S_0}^2 \right\}^{1/2} \right] \quad (6)$$

が得られる³⁾。ここで、 $H' = \lambda_u + 2\mu - \alpha^2 M$ である。また、以下の表示を用いる。

$$k_{F_0}^2 = \frac{\tilde{m}}{M} \omega^2, \quad k_{S_0}^2 = \frac{\tilde{\rho}}{H'} \omega^2, \quad k_Q^2 = \frac{\tilde{m} \tilde{\alpha}^2}{H'} \omega^2,$$

$$\tilde{m} = \frac{\rho_f}{\beta} - i \frac{\eta}{k} \frac{1}{\omega}, \quad \tilde{\rho} = \rho - \frac{\rho_f^2}{\tilde{m}}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\rho_f}{\tilde{m}}$$

散逸に関するパラメータ $b/m = \eta / (k \cdot \omega) / m$ と Biot の定数 α が縦波二成分の波数 k_S, k_F (間隙流体がない場合の弾性縦波波数 $k_L = \omega \sqrt{(\lambda + 2\mu) / (\rho - \beta \rho_f)}$ で規格化) に与える影響を図 1 及び図 2 に示す。ここでは、S波は $b/m=1$ を境にして波速が変化するが、虚部の値は小さく散逸の効果は小さいこと、一方で、F波の波速は $b/m > 1$ の場合 b が大きくなるにつれて遅くなるとともに、散逸が大きくなることが示される

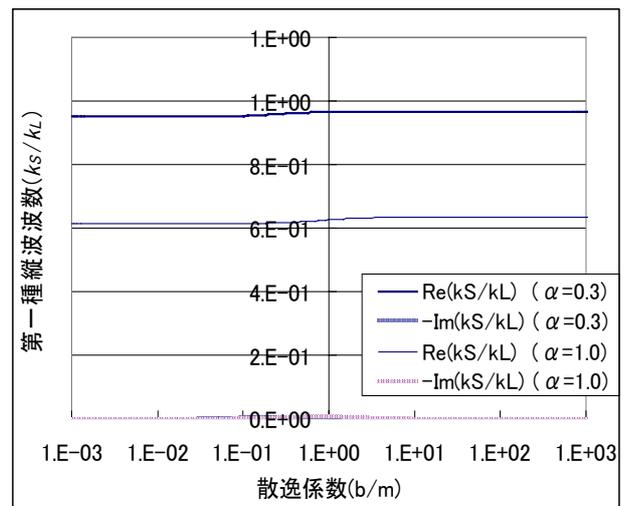


図 1 Biot の定数 α と散逸に関するパラメータ b/m が第 1 種の縦波 (S 波) 波数に与える影響

キーワード Biot 物体, 多孔質弾性, 波動伝播, 境界要素法, 散乱問題

連絡先 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 TEL(022)217-7131

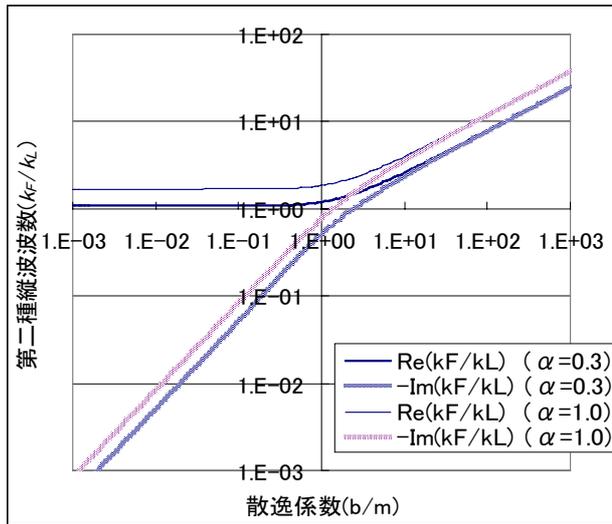


図2 Biotの定数 α と散逸に関するパラメータ b/m が第2種の縦波(F波)波数に与える影響

2. 境界積分方程式と境界要素法の離散化

(3)及び(4)式の基本解を以下のように定義する.

$$L_{KL}G_{LM}(\vec{x}, \vec{y}) = -\delta_{KM} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{7}$$

ここで L_{KL} は次の微分演算子である ($K,L,M=1,2,3,4$)

$$\begin{bmatrix} L_{ij} & L_{i4} \\ L_{4j} & L_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\delta_{ij}\Delta + H''\partial_i\partial_j + \omega^2\tilde{\rho} & -\tilde{\alpha}\partial_i \\ \tilde{\alpha}\partial_j & \frac{1}{\omega^2\tilde{m}}\Delta + \frac{1}{M} \end{bmatrix} \tag{8}$$

G_{KL} は以下の通り与えられる ($i, j=1,2,3$).

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{e^{ik_r r}}{r} \delta_{ij} + \frac{1}{k_S^2 - k_F^2} \times \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ K_F \left(\frac{e^{ik_r r}}{r} - \frac{e^{ik_F r}}{r} \right) - K_S \left(\frac{e^{ik_r r}}{r} - \frac{e^{ik_S r}}{r} \right) \right\} \right]$$

$$G_{i4} = \frac{k_Q^2}{4\pi\tilde{\alpha}} \frac{1}{k_S^2 - k_F^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{e^{ik_S r}}{r} - \frac{e^{ik_F r}}{r} \right)$$

$$G_{4i} = -G_{i4}$$

$$G_{44} = \frac{Mk_{F_0}^2}{4\pi} \frac{1}{k_S^2 - k_F^2} \times \left\{ (k_{S_0}^2 - k_F^2) \frac{e^{ik_F r}}{r} - (k_{S_0}^2 - k_S^2) \frac{e^{ik_S r}}{r} \right\} \tag{9}$$

入射波 $q^{in}=(u_1^{in}, u_2^{in}, u_3^{in}, p^{in})$ を考えると、キャビティによる散乱問題を考えると、キャビティの表面上における境界積分方程式、

$$C_{KL}q_L(\vec{x}) = q_K^{in}(\vec{x}) + \int_{\partial D} [G_{KL}(\vec{x}, \vec{y})s_L(\vec{y}) - W_{KL}(\vec{x}, \vec{y})q_L(\vec{y})]dS_y \tag{10}$$

が与えられる。ここで、 ∂D はキャビティの表面、 q_L は一般化された変位(u_1, u_2, u_3, p)、また s_L はトラクション($t_i = \sigma_{ij}n_j$, n_j は内向き法線ベクトル)と、流体の流束($q_n = 1/(\tilde{m}\omega^2)(\partial p/\partial n)$)からなる一般化された表面力である。また、 W_{KL} は s_L を定める表面力作用素を定義して求められる二重層核である。

ここでは、非浸透性の自由表面($t_1, t_2, t_3, q_n=0$)を持つ半径 a の球形キャビティへの波数 k_S のS波の入射に対する応答の全変位($q=q^{in}+q^{sc}$, q^{sc} :散乱波)を求める。図3に、Biotの定数 α を変化させた場合の表面の変位の半径方向成分(u^r)、接線方向成分(u^θ)の絶対値の分布を示す。ここで、波数 k_L の弾性縦波の入射による応答の解析解⁴⁾と比較すると、Biotの定数が孔隙率 β と一致する場合は、応答はS波と同一の波数を持つ弾性縦波に対する応答と一致する。ここでは、 $\lambda=\mu$, $\rho=3\rho_f$, $\beta=0.2$, $b=0$ として計算している

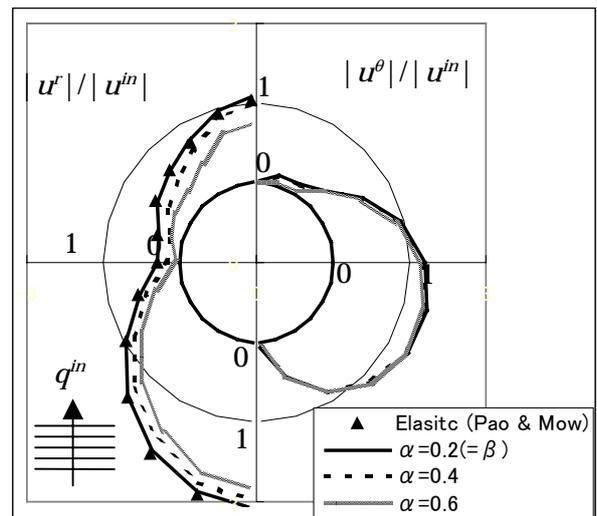


図3 $\alpha=0.2(=\beta)$, 0.4, 0.6の場合のS波入射に対する応答(実線及び破線)と $k_L a=1.3$ の弾性縦波に関する解析解()

参考文献

- 1) Biot, M. A. and Willis, D. G., The elastic coefficients of the theory of consolidation, *J. Appl. Mech.*, 24, 594-601, 1957
- 2) Biot, M. A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 28, 168-178, 1956
- 3) 福井卓雄, 船戸慶輔, 井上耕一, Biot 物体中における波動問題の周波数領域境界要素法解析, 境界要素法研究会境界要素法論文集, 13巻, 149-154, 1996
- 4) Pao, Y. H. & Mow, C. C., Scattering of plane compressional waves by a spherical obstacle. *J. Appl. Phys.*, 34, 493-499, 1963