計測変位を利用した局所構成則の逆解析

信州大学　学生員　尾棹　淳一 *
信州大学　正員　小山　茂 *
信州大学　正員　大上　俊之 *
東京大学　正員　堀　宗朗 **

1.　まえがき

材料の力学的挙動を数値解析によって予測するためには，対象となる物体の構成則を適切に評価しておく必要がある．そのためには，実験等により材料に発生する応力とひずみの測定を行わなければならない．しかし，応力については，変形の局所化現象や日本列島のように測定自体不可能な場合もある．一方，ひずみ（変位）については，近年の計測技術の発達により，ミクロのオーダ（例えばレーザ変位計）からマクロのオーダー（例えばGPS）までの対象物についてデータの入手が容易であり，その精度も十分信頼性に足るものとなっている．そこで本研究では，計測された変位のみから材料の局所的な構成則を直接評価する方法を提案し，その妥当性について検討を行った．

2.　逆解析の理論

(1)　解析対象

対象として，構成則が不明である均一な二次元等方弾性体を考える．ただし，材料が不均一な場合でも異方性を有する場合でも，定式化に大きな変化はない．材料の大きさ・境界条件は，変位が計測される限りにおいてどのようなものであっても構わない．また，対象物に幾つかの標点を定め，これらの離散点に対して変位を測定する．

(2)　定式化

計測点が頂点となるような三角形要素を作った後（**図–1**　左），内部に一つの計測点を有する多角形領域を取り出し（**図–1**　右），この領域内で構成則の推定を行う．後に示すように，定式化は有限要素法の枠内で行うが，通常ならば周囲の要素との相互作用を考慮しなければならないために，このような一部だけを抜き出して議論を行うことはできない．しかしながら，この場合は離散的な形ではあるものの，領域境界の変位が計測により既知であるために，この領域単独で変位境界条件が与えられた境界値問題が成立することに注意する．

領域を構成する要素の数を n，内部の点の番号を 1 とすると，内部の点におけるつり合い式は離散化された形で以下のように表すことができる（各要素において，内部の点を最初に番号付けるものとする）．

$$f_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} k_{1j}^{\alpha} u_j^{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n} B_{k1}^{\alpha} C_{k\ell} B_{\ell j}^{\alpha} u_j^{\alpha} = 0 \qquad (1)$$

ここで， $k_{ij}^{\alpha}, u_i^{\alpha}, B_{ij}^{\alpha}$ はそれぞれ，各要素における剛性マトリクス，変位ベクトル，変位ひずみマトリクスである． C_{ij} は各要素共通であると仮定した応力ひずみマトリクスであり，対称性を考慮して応力とひずみの関係が

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

で表せるものとする．また，式（1）において，下付きの添え字に関しては総和規約を適用している．今求めたいのは，応力とひずみとの関係を表す C_{ij} の各成分であるので，式（1) を C_{ij} についてまとめると

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (B_{k1}^{\alpha} B_{\ell j}^{\alpha} u_j^{\alpha}) C_{k\ell} = 0 \qquad (3)$$

となる．ここで応力ひずみマトリクスの各成分を

$$\{C\} = \{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{22}, C_{23}, C_{33}\} \qquad (4)$$

のようにベクトル表示すると，式（3）は連立方程式

$$A_{ij} C_j = 0 \quad (i = 1, 2) \qquad (5)$$

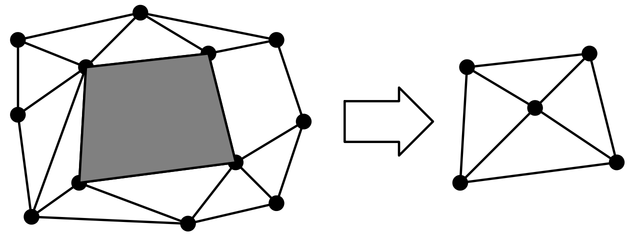
のように書き改めることができ，これを C_j について解けばよい．ここに， A_{ij} は標点の節点座標と計測変位から決まる定数マトリクスとなっている．

(3)　計算上の注意点

式（5）は，未知数である $\{C\}$ の成分の数が 6 であるのに対して式の数が 2 となっており，未知数の数に対して式の数が著しく少ない．この問題を解決するためには，荷重条件を変化させるなどして計測回数を増やす

Key Words: 逆解析，局所構成則，計測変位

* 〒380–8553 長野市若里 4-17-1 信州大学工学部社会開発工学科 Tel：026–269–5294 Fax：026–223–4480
** 〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1 東京大学地震研究所



図–1 領域の取り出し

必要がある．計測を m 回行うことによって，式の数を $2m$ 個に増やすことができる．また，一般に式の数と未知数の数は等しくなるとは限らないので，本研究では固有値分解により解いた．更に，式（5）は同次連立方程式であることから，自明な解を除き各成分の値を唯一に決定することはできない．したがって本手法では，各成分間の関係を求めるのに留まることに注意する．

3. 解析結果

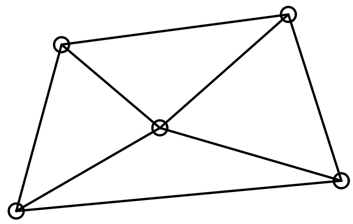
順解析で得られた変位を計測変位の代用として逆解析をし，その結果と順解析に用いた応力ひずみマトリクス C^{r}_{ij} の成分との比較を行った．ここでは，取り出す領域の形状と計測回数を変化させることで，式（5）の行列 A_{ij} の性質とサイズを変化させ，結果に及ぼす影響について着目する．取り出す領域形状は四角形とし，形状に対称性が無い場合（**図–2**）と対称性がある場合（**図–3**）の二種類に対して，計測を一回から六回まで行った．また前述のように，本手法では各成分間の関係以上のものは求められないので，$C_{11} = 1$ として解析を行っている．

(1) 取り出す領域に対称性が無い場合

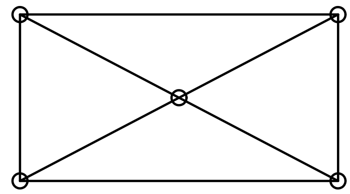
取り出す領域に対称性が無い場合の解析結果を **図–4** に示す．図の横軸が計測回数 m，縦軸が順解析で用いた応力ひずみマトリクスの各成分（C^{r}_{ij}/C^{r}_{11}）についての相対誤差 err である．図から明らかなように，計測回数が一回及び二回の場合には誤差が 100% となっているが，計測回数が三回以上の場合には正確な値が求められていることが分かる．ここでは示さないが，他の三成分 C_{13}, C_{23} については，計測回数一回で正確な値が得られている．

(2) 取り出す領域に対称性が有る場合

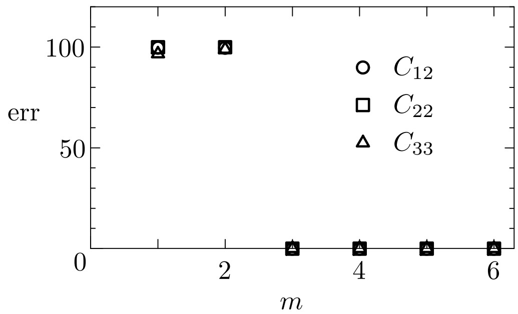
取り出す領域に対称性が有る場合の解析結果を **図–5** に示す．図から明らかなように，計測回数を増やしても正確な値を求めることはできない．以上の傾向は四角形特有のものではなく，他の多角形についても同様であった．このことから，本手法で逆解析を行う場合，構成則を推定する領域に関して一つの制限が課せられることになる．しかしながら，実際に変位を計測する場合には，領域を形成する標点は観測者が自由に選べるため，この欠点は容易に回避されるであろう．



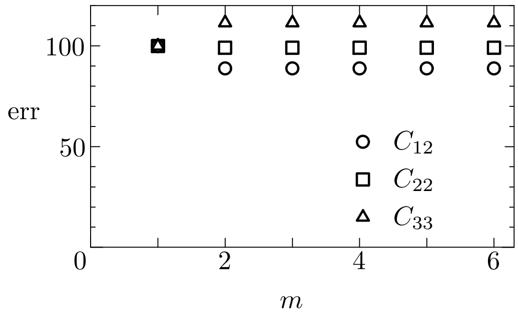
図–2 解析領域（対称性無）



図–3 解析領域（対称性有）



図–4 解析結果（対称性無）



図–5 解析結果（対称性有）

4. 結論

本研究では，計測変位のみから材料の局所的な構成則を推定する逆解析手法を提案した．実際に数値計算を行う中で，計測回数と変位を計測する標点の選び方には注意を払う必要があるということが分かった．