

骨組要素を用いた非線形マルチスケール解析

川田テクノシステム
宇都宮大学

正員 大植 健
正員 中島章典

宇都宮大学 ○正員 斉木 功
東北大学 正員 寺田賢二郎

1. はじめに

複合材料の材料特性は線形、非線形を問わず、複合材料を構成するミクロ構造により決定される。特に、ミクロ構造に分岐・大変形が生じることにより、材料としての不安定が引き起こされる典型的な材料としてセル構造体が知られている。著者らは材料不安定とミクロ構造の不安定を結びつける幾何学的非線形を考慮した非線形マルチスケールモデリング手法の確立を試みてきた¹⁾。通常、マルチスケール均質化法において、元の問題が連続体の境界値問題であれば、得られるマクロ、ミクロ問題も同じ連続体の境界値問題となる。しかし、セル構造体のような薄肉部材からなるミクロ構造に対しては骨組要素による離散化が合理的である²⁾。本報告では、ミクロ解析に骨組要素を用いた非線形マルチスケール解析手法を提案する。さらに、セル構造体を例として非線形マルチスケール解析を行ない本手法の妥当性と有効性を示す。

2. 定式化および解析アルゴリズム

図-1に示すように、大きさ ϵ の単位周期構造によって周期的に埋め尽くされた領域 Ω を解析対象とする。解析領域全体の尺度である X をマクロスケールと呼び、これに対して、微視構造での尺度としてミクロスケール変数 $Y = X/\epsilon$ を導入しておく。対象とする大変形超弾性体の釣合式は

$$\nabla_X \cdot P^\epsilon + \rho^\epsilon b = 0 \quad (1)$$

と表される。ここに、 P^ϵ は第一Piola-Kirchhoff応力、 ρ は密度、 b は単位質量当たりの物体力である。また、対象はひずみエネルギー $\mathcal{W}^\epsilon$ を持つ超弾性体とする。

変分原理と適切な収束論により、境界値問題から微視、巨視、両スケールにおける弱形式の釣合式

$$\langle P^0 : \nabla_Y \eta^1 \rangle_Y = 0 \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} \nabla_X \eta^0 : \tilde{P} dv - \int_{\Omega} \rho^H b \cdot \eta^0 dv - \int_{\Gamma_\sigma} \underline{t} \cdot \eta^0 ds = 0 \quad (3)$$

が導かれる¹⁾。ここに、 $\langle \bullet \rangle_Y$ は代表体積要素(RVE)における平均、 P^0 は全応力、 F^0 は全変形勾配、 $\tilde{P}$ は平均応力、 ρ^H は平均密度であり、それぞれ

$$P^0 := \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial F^0}, \quad F^0 := 1 + \nabla_X u^0 + \nabla_Y u^1 \quad (4)$$

$$\tilde{P} := \langle P^0 \rangle_{kY}, \quad \rho^H := \langle \rho \rangle_{kY} \quad (5)$$

により定義した。ここで非凸ポテンシャルに関して注目すべきことは、微視変位の周期性が単位周期構造ではなく複数の

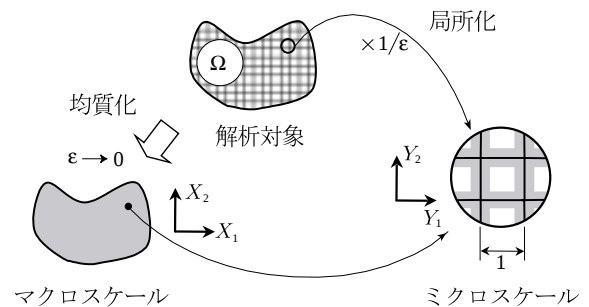


図-1 均質化法概念図

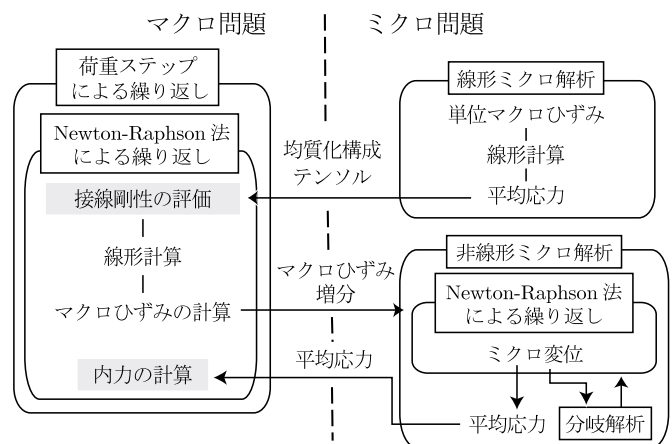


図-2 非線形マルチスケールアルゴリズム

単位周期構造からなるRVEにおいてのみ要求されることである。著者らはこの問題に対し、群論的分岐理論に基づくブロック対角化法を用いて単位周期構造の数を決定する方法を提案した¹⁾。また、このとき、ユニットセル内の全変形に起因する実変位 w は、式(4)₂より一様変形に起因する成分と周期成分 u^1 の和として以下のように与えられる³⁾。

$$w(X, Y) = \nabla_X u^0(X) \cdot Y + u^1(X, Y) \quad (6)$$

上記で定式化した、マクロ、ミクロ問題が連成する非線形解析を行うには、マクロスケールの物性評価点ごとに独立したミクロ問題を解くことになる。この非線形解析手順を図-2にまとめる。

3. 骨組要素を用いたミクロ解析

有限変位の非線形骨組解析においては、部材が細長いという幾何学的特性と変形勾配の極分解の定理から、一要素内の変形を微小とした剛体回転除去の手法が広く用いられている。本解析においても、剛体回転除去の手法により、ミクロ問題を有限変位微小ひずみとして取り扱う。

Key Words: 均質化法, セル構造体, 骨組要素, マルチスケール解析

〒321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2 宇都宮大学工学部建設学科 Tel.028-689-6210 Fax.028-689-6208

ただし、ミクロ変位 u^1 に、直接、骨組の変位場を導入することの問題点が指摘されている²⁾。同文献において、ミクロ解析の自由度に式 (6) で定義したミクロ構造の実変位 w を用いることにより、この問題が解決できることが報告されている。実変位 w に構造要素の変位場を適用すれば、ミクロ釣合式 (2) は通常の有限変位微小ひずみの骨組を一樣変形と周期境界条件のもとに解く問題に帰着される。すなわち、 u^1 に関する周期性から、実変位 w に拘束条件

$$w(X, Y + Y_i) - w(X, Y) = \{\nabla_X u^0(X)\} \cdot Y_i \quad (7)$$

を与えて解くことになる²⁾。ここに、 Y_i は RVE の基本並進ベクトルである。

また、Bernoulli-Euler はり要素などのせん断変形が拘束されるようなモデルではせん断および軸直角方向のひずみが定義できないので、平均応力の算出には注意が必要である。そこで、骨組により離散化されたミクロ自己釣合問題から平均応力を求める場合、平均応力を表面力の面積分により表しておくと都合である²⁾。これを有限ひずみ問題に拡張すれば、例えば、平均第一 Piola-Kirchhoff 応力 $\tilde{P}$ は

$$\tilde{P} = \langle P^0 \rangle_Y = \int_{\partial Y} Y \otimes t \, ds \quad (8)$$

となる。実際の数値解析においては、式 (8) は節点力の総和により求められる。

4. 解析例

図-3 (a) に示す正六角形セルからなる矩形構造を (b)、(c) のようなマルチスケールモデルにより解析した。マクロ構造は 4 節点四辺形要素を 24 要素、1 要素あたりの Gauss 点は 4 点、ミクロ構造は 1 要素 2 節点、節点自由度は回転を含む 3 自由度の平面 Bernoulli-Euler はり - 柱要素を 48 要素で離散化した。境界条件は、マクロ構造の下端部においては左隅を鉛直、水平方向固定、他は鉛直方向についてのみ拘束し、上端を鉛直上向きに一樣変位を与えた。これに対し、比較のために図-4 に示す三種類の通常の有限要素法による解析も行った。FEMa, b, c はそれぞれ 100, 200, 320 個の六角形セルを有し、自由度はそれぞれ 7200, 14400, 23040 である。総自由度数において、本マルチスケール解析モデルは、FEMb と同程度である。

このときの無次元化荷重変位関係を図-5 に示す。図中 v は上端の鉛直変位、 f は上端に作用する荷重の総和、 H , W はマクロ構造の高さ、幅、 E_s はセル壁の Young 率である。荷重変位関係から、変形の初期段階では、セル壁の曲げにより抵抗し、変形が大きくなるにつれ材料の軸剛性により抵抗するセル構造体の特徴が読みとれる。また、この結果から、本手法による非線形マルチスケール解析は、少ない自由度で、多くの自由度を有する有限要素解析に近い結果を得ることができることが分かる。計算コストに関しては、連立方程

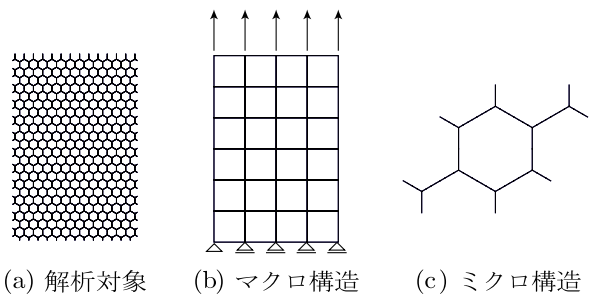


図-3 一樣引張を受けるセル構造体のマルチスケール解析モデル

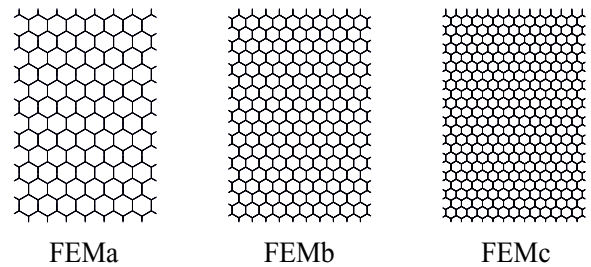


図-4 一樣引張を受けるセル構造体の有限要素解析モデル

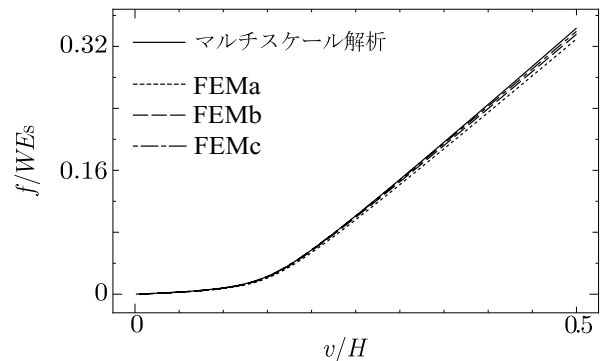


図-5 一樣引張を受けるセル構造体の荷重 - 変位関係

式の求解に自由度数の 2~3 乗の演算が必要であることを前提とすれば、マクロ問題の物性評価点ごとの非線形ミクロ解析を考慮しても、それぞれのミクロ解析が独立していることからマルチスケール解析が優れていると言える。

5. まとめ

本研究では、マクロ構造は大変形を許容する連続体であるが、ミクロ構造は分岐を含む有限変位微小ひずみの骨組でモデル化される非線形マルチスケール法を構築した。解析例を通し、本手法がセル構造体のような格子状微視構造を有する非線形構造解析に有効であることを示した。

参考文献

- 1) Saiki, I., Terada, K., Ikeda, K. and Hori, M.: Appropriate number of unit cells in a representative volume element for microstructural bifurcation encountered in a multi-scale modeling, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.191, pp.2561-2585, 2002.
- 2) 齊木 功, 大植 健, 寺田賢二郎, 中島章典: 構造要素を用いたミクロモデルによるマルチスケールモデリングとそのセル構造体への適用, 日本計算工学会論文集, Paper No.20020004, 2002.
- 3) Terada K. and Kikuchi N., A class of general algorithm for nonlinear multi-scale analyses for heterogeneous media, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.190, pp.5427-5464, 2001.