ミクロ構造不安定性を考慮した脆性材料の強度評価法

東北大学工学部　学生員　○浅井 光輝
東北大学工学部　正会員　寺田 賢二郎

1.　はじめに

コンクリート，岩盤，セラミックスなどの準脆性材料と呼ばれる材料において，ミクロ-マクロの視点で観測してみると，微視的な材料非均質性によりクラック，ボイドなどの不連続変形が誘発され，それが材料の強度を支配していることが容易に推察される．しかしながら，こうした準脆性的な材料に対する材料の強度予測手法の現状としては，微視的な視点はなく，供試体実験における供試体の“見かけ”の強度を材料強度として採用されることが多い．このため，載荷する端面における摩擦の影響や供試体寸法を変化に伴い，材料強度が大きく変動してしまうといった結果を招いているように，材料強度の定義自体が曖昧である．

そこで本研究では，非均質な準脆性材料における強度評価の一般的な方法論として，合理的なマルチスケールモデリング手法と知られる数学的均質化理論に基づいた材料強度の評価法を提案することを目的とする．

2.　均質化理論による亀裂性材料のマルチスケール解析

線形力学理論の枠組み内において発展してきた漸近展開法に基づく均質化理論は，弾塑性体に対するミクロ-マクロ連成モデリングまでもが可能な非線形均質化理論が整備されるまでに至っている[1)]．本研究ではまず，同様の定式化に基づき，亀裂進展を含むマルチスケール解析へと発展させる．

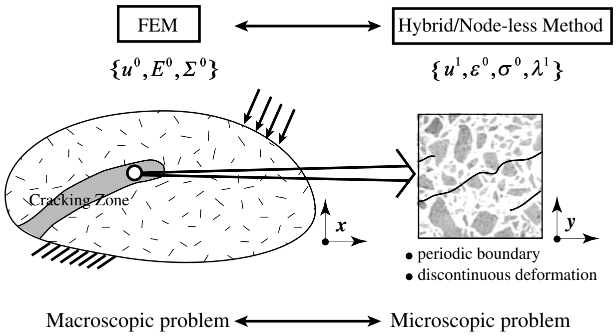
(1)　Two-scale 境界値問題

図–1 に示すように，ミクロ領域においてHPMと同様なノードレス法による不連続体の解析を行い，マクロスケール問題ではミクロ構造の不連続挙動を反映した等価な連続体を仮定して解析するというマルチスケール問題を設定する．

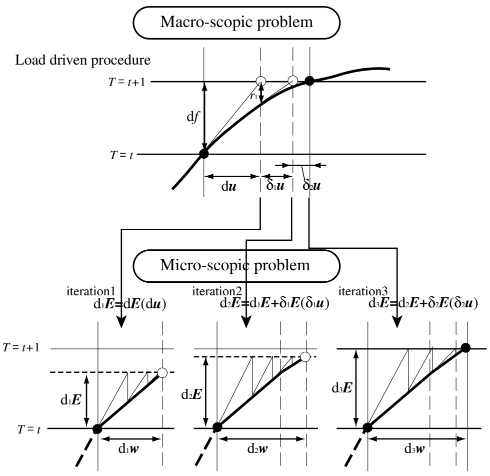
古典的な均質化理論に従い，マクロスケール $\boldsymbol{x}$ とミクロスケール $\boldsymbol{y}$ の異なる 2 つ尺度を導入することで，ミクロ，マクロそれぞれの支配方程式が導かれる．

$$\int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^1 : \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,dy = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\eta}^1 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\int_\Omega \nabla_x \boldsymbol{\eta}^0 : \Sigma(\boldsymbol{x})\,dx = \int_\Omega \rho^H \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\eta}^0\,dx + \int_{\Gamma_\sigma} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\eta}^0\,ds \quad \forall \boldsymbol{\eta}^0 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$



図–1　亀裂性材料のミクロ-マクロ連成モデリング



図–2　亀裂性材料のミクロ-マクロ連成モデリング

ここで，マクロ支配方程式 (2) におけるマクロ応力 Σ ／ひずみ $\boldsymbol{E}$ は，それぞれミクロ応力 $\boldsymbol{\sigma}^0$ ／ひずみ ε^0 のユニットセル内での領域平均量として次式により与えられる．

$$\Sigma = \langle \boldsymbol{\sigma}^0 \rangle \;, \quad \boldsymbol{E} = \langle \varepsilon^0 \rangle . \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

そしてTwo-scale境界値問題は，「$\boldsymbol{x}$ について変分方程式 (1) を満足するようなミクロ状態変数の組 $\{\boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \varepsilon^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}$ を求め，同時にそれらの領域 Y での体積平均を含むマクロ状態変数 $\{\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}), \Sigma^0(\boldsymbol{x})\}$ が変分方程式 (2) を満たすように定める.」のように設定される．

(2)　ミクロ-マクロ反復計算の概略

上記の非線形マルチスケール問題を解く際のミクロ-マクロ反復計算過程を模式的に**図–2** に示す．ミクロ-マクロ反復計算過程において，ミクロ反復計算により求まるミクロ自己つり合いの状態 (亀裂進展状況など) は，マクロ問題には均質化 (マクロ) 接線剛性 $\boldsymbol{C}^H$ として反映される．

〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 東北大学工学部 土木工学科, Phone: 022-217-7420, FAX: 022-217-7418
Key Words: *Multi-scale analysis, Material instability, Strength evaluation*

3. 材料安定性理論による強度評価法

(1) 非均質材料の安定・不安定性

非均質材料においてマクロ接線弾性係数 $\boldsymbol{C}^H$ は，巨視的な材料特性 (マクロ材料特性) として考えられる．以下には，材料の安定・不安定性に関する理論にこの均質化接線弾性係数 $\boldsymbol{C}^H$ を用いて，マクロ的な材料の安定性を調べる．

材料の安定性に関する議論は，次式に示すように接線剛性係数の正定値性により判断される[2]．

$$\det\left(C^H_{ijkl} + C^H_{klij}\right) = 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

また，不連続面発生条件は次式により与えられる．

$$\det\left(Q^H_{ik}\right) = 0; \quad Q^H_{ik} = n_j C^H_{ijkl} n_l \quad \cdots\cdots (5)$$

ここで，$\boldsymbol{Q}$ は 2 階の特性テンソル（acoustic tensor）であり，$\boldsymbol{n}$ は不連続面の法線方向ベクトルを示す．この不連続発生条件式 (5) を満たすときには，材料は式 (4) により不安定状態であると必ず判別される．

(2) マクロ材料強度・破壊靭性・不連続面の定義

非線形マルチスケール解析を行い，均質化接線係数 $\boldsymbol{C}^H$ を用いて (マクロ的な) 不連続面の発生が確認される状態が求められたものとする．本研究では，材料強度および破壊靭性を以下のように定義した．

材料強度: 材料として不安定となる状態 (=終局状態) を迎えるまでのマクロ応力成分の最大値

破壊靭性: 定義した材料強度から終局状態までのマクロひずみ増分

また，x_c においてはじめて $f(x)$ が最小値が負となるとしたとき，マクロ的な不連続面の法線方向 θ^H_c は，

$$\theta^H_c = \arctan(x_c) \quad \cdots\cdots (6)$$

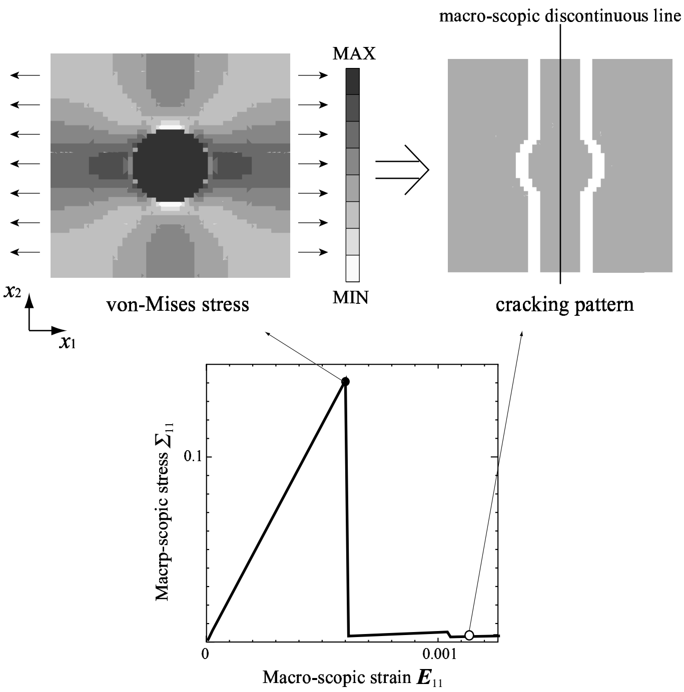
として与えられる．

4. 解析例

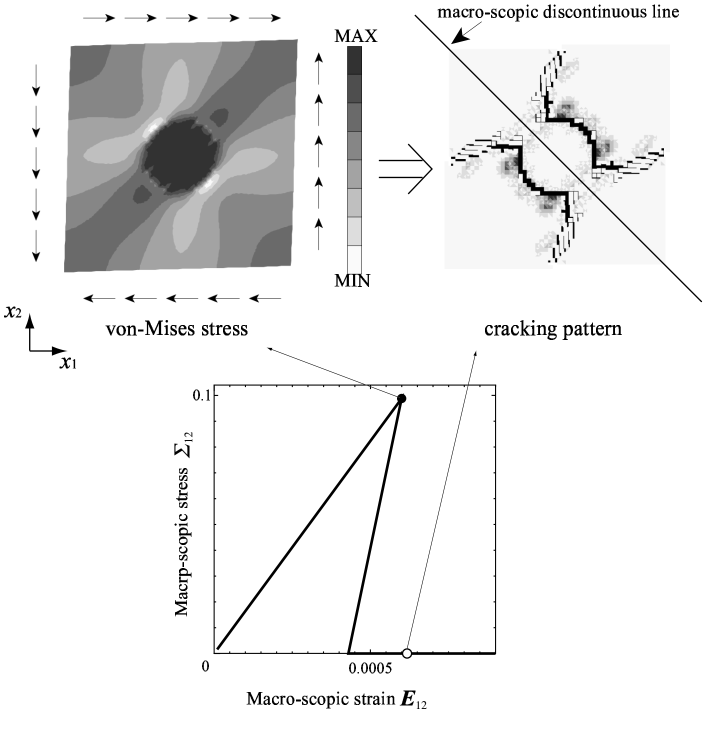
数値解析例として，単純な円形介入物を含む複合材料問題を設定し，一軸引張試験と純粋せん断試験を行った．その解析結果 (ミクロ構造での変形・応力分布とマクロ応力〜ひずみ関係) をそれぞれ**図–3**,**4** に示す．この結果では，マクロ的な不連続面の法線方向は一軸引張試験の場合は 0°，純粋せん断試験の場合が 45° と物理的に妥当な結果を与えている．また，明らかに強度が発現していることが確認できるが，破壊靭性の定義については検討する必要があるものと考える．

5. おわりに

本研究により与えられる材料強度特性は，従来の破壊力学などでは考慮できない複合材料のミクロ構造の影響を反映することが可能となるものである．また，実験により材料特性を測る方法とは異なり，供試体形状，境界条件などの影響を受けず，周期境界条件下という材料として理想的な境界条件の結果より算出される特性である．



図–3 円形介入物の一軸引張試験



図–4 円形介入物の純粋せん断試験

参考文献

1) Terada, K. and Kikuchi, N. : A class of general algorithms for multiscale analysis of heterogeneous media, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol.190, pp. 5427-5467, 2001.
2) Ortiz, M., Leroy, Y. and Needleman, A. : A finite element method for localized failure analysis, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol.61, pp. 189-214, 1987.