

Wavelet BEM による均質化境界要素解析の効率化

新潟大学大学院 学生会員 紅露一寛
新潟大学工学部 正会員 阿部和久

1. はじめに

近年、均質化理論に基づいた不均質体の力学挙動の評価に対し、多くの研究者・技術者が関心を寄せている。均質化法では、対象とする不均質体が周期的ミクロ構造を有すると仮定した上で、当該物体の境界値問題をマクロ・ミクロ両スケールに対応する2変数の境界値問題に帰着させる。その際、ミクロ構造は単純なモデル(ユニットセル)で表現されるため、計算上の負担が大きいミクロ構造内部の要素分割を最小限に抑えることができる。今日、主として有限要素法(FEM)を用いた均質化解析が盛んに試みられているが、これには境界要素法(BEM)を適用することも可能である。BEMの導入によって解析時の要素分割がさらに容易となるものの、ミクロ問題において多数の境界要素を必要とする問題においてはBEMの計算効率の悪さが実用上の障害となる。この欠点はwavelet基底を用いることで克服できる。Waveletを用いたBEM(wavelet BEM)は、wavelet基底を用いて積分方程式を離散化することで、高い距離減衰次数を有する係数行列成分を生成する。その際、係数行列においては微小成分が大半を占めることとなり、それらの成分を切り捨てることで係数行列の疎行列化が可能となる。以下においては、多孔質弾性体を対象とした均質化境界要素解析においてwavelet BEMを適用し、解析時における計算効率の改善効果について検討する。

2. 境界積分方程式を用いた均質化弾性テンソルの評価

y_1 - y_2 断面形状が面外方向(y_3 方向)に一樣なユニットセル(図-1 参照)で代表される周期的ミクロ構造を有する多孔質弾性体を考える。均質化理論¹⁾を適用すれば、この物体の均質化弾性テンソル D_{ijkl} は次の境界積分によって算出することができる²⁾。

$$D_{ijkl} = (1 - V)E_{ijkl} - \int_S E_{ijpq} \chi_p^{kl} n_q d(\partial Y), \quad (1)$$

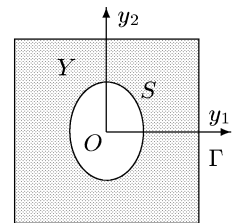


図-1 ユニットセルの断面形状。

ここで、 E_{ijkl} は母材 Y の弾性定数テンソル、 V はセル内部の空隙比であり、 n_q は単位外向き法線ベクトル成分である。なお、以下では簡単のために母材は等方均質とし、セルは辺長が単位長さの正方形断面を有するものとする。また、 χ^{kl} は力の釣り合い式とセルの周期条件を満足する関数で、次の境界積分方程式と境界条件から決定される²⁾。

$$c_{ij} \chi_j^{kl} + \int_{\partial Y} p_{ij}^* \chi_j^{kl} d(\partial Y) - \int_{\partial Y} u_{ij}^* p_j^{kl} d(\partial Y) = 0, \quad p_i^{kl} := E_{ijpm} \chi_{p,m}^{kl} n_j, \quad (2)$$

$$p_i^{kl} = E_{ijkl} n_j, \quad (\text{on } S), \quad \begin{aligned} \chi_{(left)}^{kl} &= \chi_{(right)}^{kl}, & \mathbf{p}_{(left)}^{kl} + \mathbf{p}_{(right)}^{kl} &= \mathbf{0}, \\ \chi_{(top)}^{kl} &= \chi_{(bottom)}^{kl}, & \mathbf{p}_{(top)}^{kl} + \mathbf{p}_{(bottom)}^{kl} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (\text{on } \Gamma), \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{p}^{kl}$ は χ^{kl} に対応する表面力ベクトルであり、下添字は Γ の部分境界を表わしている。式(1)を用いて均質化テンソル成分を決定するためには、6通りの変形モード χ^{kl} を予め求めておく必要がある。なお、図-1に示すミクロ構造においては χ^{23} , χ^{31} は面外成分、それ以外の χ^{kl} については面内成分のみを持ち、互いに独立に計算できる。その際、基本解は2次元の静弾性基本解 $u_{\alpha\beta}^*$, $p_{\alpha\beta}^*$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) または $u_{33}^* = u^*/G$, $p_{33}^* = q^*$ (u^* , q^* : 2次元 Laplace 問題の基本解, G : せん断弾性係数) のいずれかで与えられる。

3. 均質化境界要素解析のための wavelet BEM

式(2), (3)の境界値問題を解くために、wavelet BEMを用いる。式(2)の積分方程式を離散化するために、次の wavelet 級数で定義される近似関数 $\tilde{\chi}_j^{kl}$, $\tilde{p}_j^{kl}$ を導入し、Galerkin法を適用する³⁾。

$$\tilde{\chi}_j^{kl} := \sum_{p=1}^{n_s} \hat{X}_{j,p}^{kl} \phi_{0,p} + \sum_{m=0}^M \sum_{q=1}^{n_m} \tilde{X}_{j,mq}^{kl} \psi_{m,q}, \quad \tilde{p}_j^{kl} := \sum_{p=1}^{n_s} \hat{T}_{j,p}^{kl} \phi_{0,p} + \sum_{m=0}^M \sum_{q=1}^{n_m} \tilde{T}_{j,mq}^{kl} \psi_{m,q}, \quad (4)$$

ここで、 $\phi_{0,p} = \phi(\xi - p)$, $\psi_{m,q} = 2^{m/2} \psi(2^m \xi - q)$ はそれぞれスケーリング関数、wavelet であり、本研究では ϕ , ψ を区間一定関数、Haar wavelet³⁾で与える。 n_s , n_m は基底 $\phi_{0,p}$, $\psi_{m,q}$ の個数であり、 M は最高階層数である。

境界要素方程式の構成において、境界条件(3)は展開係数 $\hat{X}_{j,p}^{kl}$, $\tilde{X}_{j,mq}^{kl}$, $\hat{T}_{j,p}^{kl}$, $\tilde{T}_{j,mq}^{kl}$ に課される。その際、基底 ϕ の対称性と ψ の反対称性を考慮する必要がある。なお、wavelet BEMにおいては、一般に係数行列のスプース性を考慮して反復解法を用いて境界要素解を計算する。その際、反復解は良好な収束性を有することが望ましい。そこで、

Key words : wavelet 境界要素法, 均質化法, 高速解法, Haar wavelet, 均質化弾性テンソル

連絡先 : 〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地 TEL (025) 262-7028 FAX (025) 262-7021

方程式に対しブロック単位での行方向の加減操作を行ない、主要な係数成分を行列の対角近傍に分布させることで反復解の収束性の悪化を防止する。その結果、境界要素解は次式を解くことで求められる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{S,S} & \mathbf{H}_{S,\bar{\Gamma}} + \rho_{\bar{\Gamma}} \mathbf{H}_{S,\Gamma'} \\ \mathbf{H}_{\bar{\Gamma},S} + \rho_{\bar{\Gamma}} \mathbf{H}_{\Gamma',S} & \mathbf{H}_{\bar{\Gamma},\bar{\Gamma}} + \mathbf{H}_{\Gamma',\Gamma'} + \rho_{\bar{\Gamma}} (\mathbf{H}_{\bar{\Gamma},\Gamma'} + \mathbf{H}_{\Gamma',\bar{\Gamma}}) \\ \mathbf{H}_{\bar{\Gamma},S} - \rho_{\bar{\Gamma}} \mathbf{H}_{\Gamma',S} & \mathbf{H}_{\bar{\Gamma},\bar{\Gamma}} - \mathbf{H}_{\Gamma',\Gamma'} + \rho_{\bar{\Gamma}} (\mathbf{H}_{\bar{\Gamma},\Gamma'} - \mathbf{H}_{\Gamma',\bar{\Gamma}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_S^{kl} \\ \mathbf{X}_{\bar{\Gamma}}^{kl} \\ \mathbf{T}_{\bar{\Gamma}}^{kl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S,S} \mathbf{T}_S^{kl} \\ \mathbf{G}_{\bar{\Gamma},S} \mathbf{T}_S^{kl} \\ \mathbf{G}_{\Gamma',S} \mathbf{T}_S^{kl} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ はそれぞれ u_{ij}^* , p_{ij}^* を含む二重積分から生成される係数小行列であり、 $\rho_{\bar{\Gamma}}$ は 1 (近似基底が ϕ の場合) または -1 (近似基底が ψ の場合) を成分にもつ対角行列である。また、 $\Gamma = \bar{\Gamma} \cup \Gamma'$ とし、 Γ' は $\bar{\Gamma}$ の対辺に存在する部分境界である。なお、下添字は基底関数が配置されている部分境界を表わす。係数行列の切り捨ては式(5)の係数成分を対象とし、基底の階層に依存しない切り捨て基準値を用いる Beylkin 型のアルゴリズム³⁾⁴⁾に基づいて実行する。その際、切り捨て基準値 τ は文献⁴⁾の手法に準じて事前に設定する。

4. 解析結果

提案手法の有効性を確認する目的で、図-2に示すマイクロ構造を対象に均質化解析を試みた。なお、母材の Young 率と Poisson 比はそれぞれ 1, 0.3 と設定し、境界要素解析は χ^{kl} の面内成分のみを対象とした。そのため、均質化弾性テンソルの成分は独立な 9 成分のうち D_{2323} , D_{3131} を除く 7 成分を算出した。影響係数の評価の際に行われる境界積分は、解析積分ないしは wavelet 重み付き公式⁵⁾による数値積分のいずれかで処理した。数値積分における特異・擬特異性の除去は subtraction 法によった。

まず、記憶量の削減効果を論ずるために、自由度と保存成分数の関係を図-3に示す。本研究では文献⁴⁾の手法に準ずる切り捨てアルゴリズムを採用しているため、保存成分数は $O(N(\log N)^\gamma)$ (N : 自由度) とはならないものの $O(N^{1.76})$ (Ex.1), $O(N^{1.32})$ (Ex.2) で概ね推移している。ただし、自由度を大きくするほど係数行列の圧縮率は高くなっており、大規模均質化境界要素解析における記憶量の削減に対して一定の効果が期待できる。

次に、図-4に求解時の反復回数を示し、反復解の収束性を改善するために導入した連立方程式の再構成アルゴリズムの有効性について考える。なお、反復ソルバは GMRES(リスタート値 100) と Jacobi 前処理を併用した手法を用いた。図中比較のために前述の加減操作を実行しない場合の結果も示してある。再構成を行なうことで Jacobi 前処理の効果が増し、反復回数が 1/4-1/5 程度まで削減できていることがわかる。

最後に、Ex.3, Ex.4 における均質化弾性テンソル成分、係数行列の圧縮率、全計算時間を表-1に示す。なお、均質化テンソル成分は 5 成分のみを示している。紙面の都合上、境界要素解・均質化テンソルの誤差挙動を示していないが、本解析例においては 5,000-10,000 自由度の下で 3-4 桁程度の精度を有する均質化テンソル成分の算出が可能であった。その際、保存が必要な係数成分は 20-30% まで削減できることがわかる。なお、計算時間は保存成分数と同様の自由度依存性を示す傾向が認められた。

参考文献

- 1) Guedes, J.M. & Kikuchi, N.: Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.83, pp.143-198, 1990.
- 2) Okada, H., Fukui, Y. & Kumazawa, N.: Homogenization method for heterogeneous material based on boundary element method. *Comput. & Struct.*, Vol.79, pp.1987-2007, 2001.
- 3) Koro, K. & Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Eng. Anal. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149-164, 2001.
- 4) Koro, K. & Abe, K.: Determination of optimal threshold for matrix compression in wavelet BEM. *Boundary Elements XXIII*, Bescos, D.E. et al. eds., WIT Press, Southampton UK, pp.475-484, 2001.
- 5) 紅露一寛・阿部和久・平林秀之: Wavelet 基底を用いた境界要素解析の効率化のための wavelet 重み付き Gauss 積分公式. 応用力学論文集, Vol.4, pp.127-136, 2001.

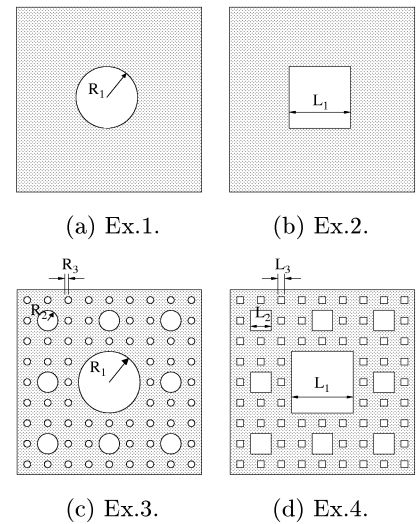


図-2 解析対象としたマイクロ構造。(正方形断面, 空孔の大きさ: $R_1 = 1/6$, $R_2 = 1/18$, $R_3 = 1/54$, $L_1 = 1/3$, $L_2 = 1/9$, $L_3 = 1/27$)

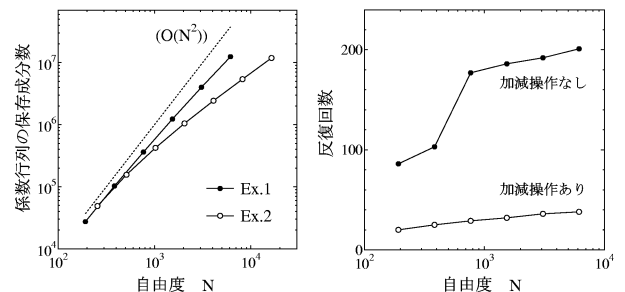


図-3 保存成分数の推移。図-4 反復回数の推移 (Ex.1).

表-1 均質化弾性テンソル成分、係数行列の圧縮率と計算時間 (Ex.3, Ex.4).

	Ex.3	Ex.4
自由度	5,888	11,264
D_{2222}	0.65922	0.48477
D_{3333}	0.92655	0.81082
D_{1122}	0.23166	0.11793
D_{2233}	0.26726	0.18081
D_{1212}	0.10214	0.09254
切り捨て基準値 τ	1.319×10^{-5}	4.458×10^{-6}
圧縮率 (%)	34.29	21.66
計算時間 (sec)	3213.90	2349.81