非線形粘弾性構造物のDuffing振動

広島大学 正会員 ○有尾 一郎 *1
広島大学 学生会員 海田 辰将 *1

1. はじめに

構造物の動的非線形問題は，挙動が複雑となるだけでなく系の安定性を喪失させる要因を含んでおり，構造力学の分野では，幾何学的非線形性を持つ偏平シェル・ドームに対する動座屈研究が行われてきた[1)].

一方，Duffing系の非線形振動問題は，単純な構造でさえ解析解が得られず，計算機による数値解析では，1-線形パラメータの解析でも解の多様な振舞い(カオス)が現れ，詳細な解析には膨大な計算が必要である[2),3)].

本研究では，既往の非線形動力学および構造力学的観点から，多自由度粘弾性ドーム構造に対するDuffing方程式のカオス挙動およびその安定性・収束性を調査した．解の動的安定性はその初期値鋭敏性に依存するため，Lyapunovの漸近安定理論に基づく指数を採用することによって，系の動的安定性を示す.

2. General Coordinate Method

一般化変位 Q_i を用いて一般化座標を表すと，変位は $u_j = u_j(Q_i)$ となる．このとき全ポテンシャルエネルギーはテイラー展開すると，

$$\begin{aligned} U &= U[Q_i, f] \\ &\equiv A_i Q_i + A_{ij} Q_i Q_j + A_{ijk} Q_i Q_j Q_k \\ &\quad + A_{ijkl} Q_i Q_j Q_k Q_l \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1) \end{aligned}$$

となる．ここに，$i, j, k, l = 1, \cdots, n$ である.

動的不安定挙動追跡の解析評価を行なう上で，その静的分岐解析が必要となる．ここでは，Thompson and Huntの一般化変位に基づく係数展開評価による分岐解析を例示する.

(1) 分岐モデル

高さ γL を有するトラスモデルの変位 u, v において，$(Q_1 = v/L, Q_2 = u/L)$ と定義すると，このとき全ポテンシャルエネルギーは,

$$U = \sum_{i=1}^{2} \frac{EA\ell_0}{2} \varepsilon_i^2 - fQ_1 L \qquad (2)$$

となり，式(2)を書き直すと，

$$\begin{aligned} U &= \frac{EAL}{(1+\gamma^2)^2} \Big(4\gamma^2 Q_1^2 + 4Q_2^2 - 4\gamma Q_1^3 - 4\gamma Q_1 Q_2^2 \\ &\qquad + Q_1^4 + 2Q_1^2 Q_2^2 + Q_2^4 \Big) - fLQ_1 \\ &= A_{11} Q_1^2 + A_{22} Q_2^2 + A_{111} Q_1^3 + A_{122} Q_1 Q_2^2 \\ &\quad + A_{1111} Q_1^4 + A_{1122} Q_1^2 Q_2^2 + A_{2222} Q_2^4 - fLQ_1 \end{aligned}$$

となる．つりあい式は,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= 2A_{11} Q_1 + 3A_{111} Q_1^2 + A_{122} Q_2^2 + 4A_{1111} Q_1^3 \\ &\quad + 2A_{1122} Q_1 Q_2^2 - fL = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3) \\ \mathcal{F}_2 &= A_{22} Q_2 + A_{122} Q_1 Q_2 + A_{1122} Q_1^2 Q_2 \\ &\quad + 2A_{2222} Q_2^3 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4) \end{aligned}$$

と表される．式(3)に $Q_2 = 0$ を代入すると，主経路と分岐経路はそれぞれ

$$f_{\rm main} = \frac{4EA}{(1+\gamma^2)^2} Q_1 (Q_1 - \gamma)(Q_1 - 2\gamma), \quad (5)$$

$$f_{\rm sec} = \frac{8(\gamma - Q_1)}{(1+\gamma^2)^2} EA \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

と得られる．分岐経路上の Q_1 と Q_2 の関係は,

$$Q_1 = \frac{-A_{122} \pm \sqrt{A_{122}^2 - 4A_{1122}(A_{22} + 2A_{2222} Q_2^2)}}{2A_{1122}} \quad (7)$$

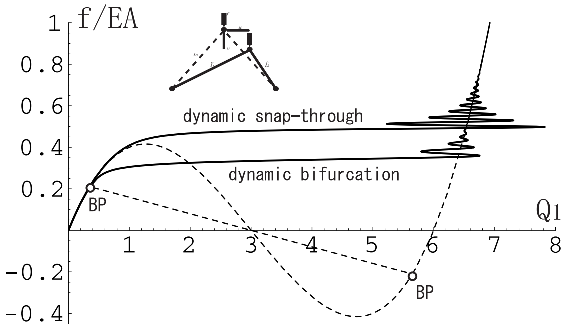
となる．ここで $Q_2 = 0$ より特異点

$$\begin{aligned} Q_1^{\rm BP} &= \frac{-A_{122} - \sqrt{A_{122}^2 - 4A_{1122} A_{22}}}{2A_{1122}} \\ &= \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 2}, \quad \gamma > \sqrt{2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (8) \end{aligned}$$

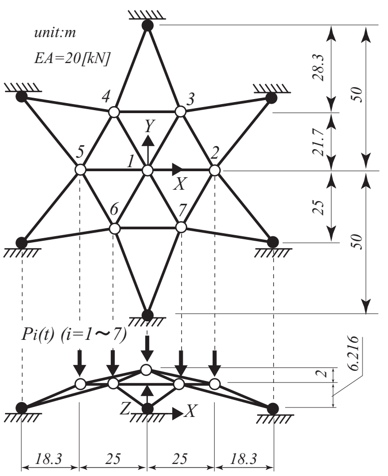
が求まり，また，$f_{\rm sec}$ に $Q_1^{\rm BP}$ を代入することにより，分岐座屈荷重

$$f_{\rm BP} = \frac{8\sqrt{\gamma^2 - 2}}{(1+\gamma^2)^2} EA \qquad (9)$$

key words: Duffing's oscillator, Lyapunov Exponents, dynamic snap-through, periodic solutions
*1 〒739-8527 東広島市鏡山1-4-1



図– 1 dynamic snap-through on 2bar model ($\gamma = 3$)



図– 2 Model

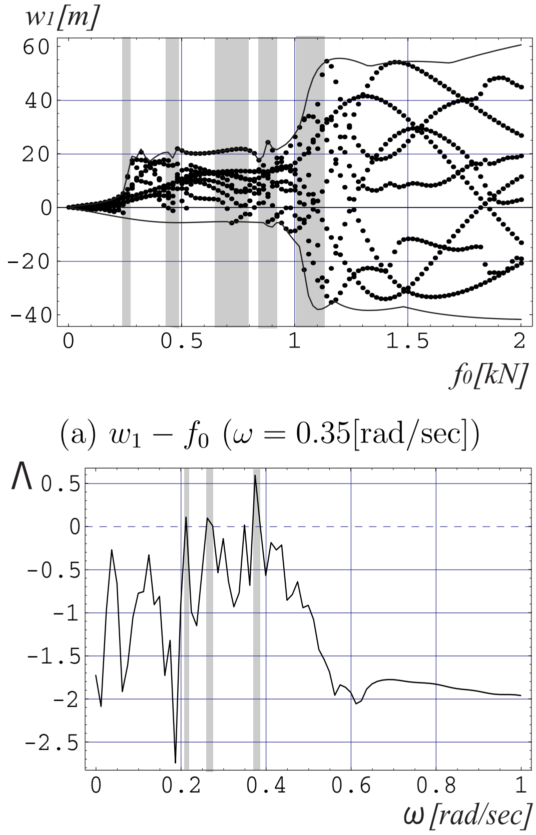
が近似的に求められる．すなわち，$\gamma \leq \sqrt{2}$ のときは，極限点に達した後飛移り座屈し，$\gamma > \sqrt{2}$ のとき，$Q_1^{\mathrm{BP}} = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 2}$ で分岐座屈を起こす．従って，多自由度系の Duffing 方程式は

$$M\ddot{Q}(t) + C\dot{Q}(t) + \mathcal{F}(Q, f(t)) = \mathbf{0} \tag{10}$$

と書ける．例えば，初期条件 $(Q(0) = \mathbf{0}, \dot{Q}(0) = \mathbf{0})$ を与えると，その結果，**図–1** のような主経路間を飛移る動的挙動が追跡できた．

3. カオス挙動

図–2 に解析モデルである 21 自由度の単層ラチスドームを示す．初期値として鉛直変位 $w_i(0) = \dot{w}_i(0) = 0, \ \ (i = 1, \cdots, 7)$ を与えて完全形とし，自由節点に鉛直方向強制外力を設定した．**図–3**(a) と (b) に f_0 を 0.01[kN] 刻みで区間 [0,2] において計算を行ったときの $w_1 - f_0$ アトラクタと



(a) $w_1 - f_0$ ($\omega = 0.35$[rad/sec])

(b) $\omega - \Lambda$

図– 3 Dynamic stability by Liapunov exponents

Lyapunov 指数の変化を示す．解の分布は 3 つの区間でその性状は異なり，図中薄灰色で示されているように，局所的にカオス $(\Lambda > 0)$ が発現していることが特徴的である．特に，カオス領域が初めて発現する $f_0 = 0.25$[kN] 付近は重要であり，ある臨界において容易に Dynamic snap-through を起こす．さらに f_0 が増大すると，$f_0 = 1$[kN] 付近から解が拡大し始め，より大きな応答を示すようになる．この遷移区間 $(f_0 = [1, 1.1])$ のときカオス領域となる．

参考文献

1) Haung, N.C. : Axisymmetric dynamic snap-throgh of elastic clamped shallow spherical shells, *AIAA Journal*, **7**, No.2, pp.215-220, 1969.
2) Moon, F.C. and Holmes, P.J. : A magnetoelastic strange attractor, *Journal of Sound and Vibration*, **65**(2), pp.275-296, 1979.
3) Ueda, Y. : Steady motions exhibited by Duffing's equation : A picture book of regular and chaotic motions, *In New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics, SIAM*, pp.311-322, 1980.