格子ボルツマン法による非圧縮粘性流体の数値解析

中央大学 学生員 ○立石 絢也
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

従来，流体の数値解析は，流れの支配方程式である Navier-Stokes 方程式を差分法や有限要素法などの偏微分方程式の数値解法を用いて解くことが一般的であった．しかし，近年流体を仮想的な粒子の集合体としてとらえ，粒子の衝突，並進を計算して流体の運動をあらわす格子ボルツマン法 (LBM : Lattice Boltzmann Method) が注目を集めるようになってきた．

本報告では，2次元正方形格子に2次元9速度モデル (2d9v model) を適用した格子 BGK モデルを用いて非圧縮粘性流体の解析を行った．数値解析例として，キャビティ内対流問題を取り上げ，本手法の有効性について検討を行った．

2. 数値解析手法

(1) 格子ボルツマン法

格子ボルツマン法は，分子の動力学方程式であるボルツマン方程式の速度空間を有限個のベクトルで離散化し，各速度の粒子密度分布関数を解くことにより流体を解析する手法である．流体粒子一つひとつの動きを追うのではなく，その存在確率を解くため，Navier-Stokes 方程式を差分法や有限要素法で解く場合とほぼ同じ格子解像度で計算をすることが可能である．

(2) 格子と粒子分布

格子ボルツマン法では一般に，空間を規則的な格子によって一様に離散化する．各格子点上では，静止粒子と，隣接する格子点へ向かう粒子が存在する．2次元計算では，正三角形もしくは正方形格子が用いられ，3次元計算においては，立方体格子が一般に用いられる．本報告では，2次元正方形格子上で，静止する粒子と周囲8方向への速度をもつ非熱流体2次元9速度モデル[1)2)]（図-1）を採用した．

2d9v モデルでは，粒子の速度は以下のように表される．

0: 静止している粒子（1個）

$$e_{01} = 0 \tag{1}$$

1: 鉛直，水平方向を速度 $|e_{1i}| = 1$ で動く粒子（4個）

$$e_{1i} = \left(\cos\frac{i-1}{2}\pi, \sin\frac{i-1}{2}\pi\right) \quad i = 1, ..., 4 \tag{2}$$

2: 対角線方向を速度 $|e_{2i}| = \sqrt{2}$ で動く粒子（4個）

$$e_{2i} = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{i-1}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{i-1}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad i = 1, ..., 4 \tag{3}$$

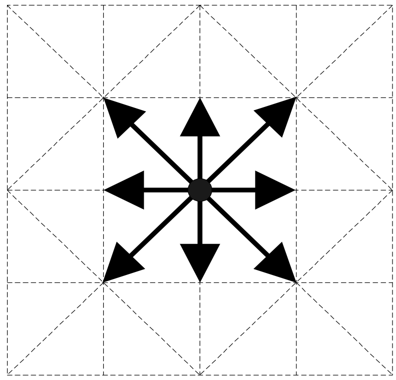

図-1．2次元正方形格子上の 2d9v モデル

(3) 格子 BGK モデル

格子 BGK モデルにおける格子ボルツマン方程式は以下のように表される．

$$f_{\sigma i}(x + e_{\sigma i}\Delta t, t + \Delta t) = f_{\sigma i}(x, t) - \frac{1}{\tau}[f_{\sigma i}(x, t) - f_{\sigma i}^{(0)}(x, t)] \tag{4}$$

ここで，$e_{\sigma i}$ は粒子密度分布関数 $f_{\sigma i}$ で示される粒子の並進速度，Δt は微小時間増分量である．粒子密度分布関数とは，ある方向の速度を持つ粒子がどれぐらいの割合で存在しているかを実数で表した関数である．右辺第二項は，粒子の衝突過程を表している．τ は1タイムステップにおける時間間隔 Δt を基準にとったときの粒子分布が平衡状態に達するまでにかかる時間に相当し，単一時間緩和係数と呼ばれる定数である．$f_{\sigma i}^{(0)}(x, t)$ は，局所平衡分布関数と呼ばれる関数である．左辺は，衝突過程後に粒子が $e_{\sigma i}\Delta t$ 離れた近接の格子点に移動する並進過程を表している．このモデルの衝突演算子は，一回の衝突において全格子点の粒子分布が，常に同じように $1/\tau$ の割合で非平衡量が減少して，局所的な平衡状態に向かって緩和するということを表している．単一時間緩和係数 τ は流体の粘性によって決まる値であり，動粘性係数と以下のような関係にある．

$$\nu = \frac{2\tau - 1}{6} \tag{5}$$

τ は 1/2 から無限大までの値をとる．τ が 1/2 に近づくということは，粘性が小さくなることを意味し，1/2 になると非粘性の流体となり解の発散をもたらす．

(4) 局所平衡分布関数

局所平衡分布とは，有限な空間領域内において平衡状態に達した場合の粒子分布であり，局所的な流体密度，流速および温度によって一意に決定される．本報告で用いた非熱流体 2d9v 格子 BGK モデルにおける局所平衡分布関数は以下のように表される．

Key Word: 格子ボルツマン法，非圧縮粘性流体，格子 BGK モデル
〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27
TEL 03-3817-1815,FAX 03-3817-1803

静止粒子；$(\alpha=\frac{4}{9})$

$$f_{01}^{(0)}=\rho\alpha\left[1-\frac{3}{2}u^2\right] \tag{6}$$

水平，鉛直方向粒子；$(\beta=\frac{1}{9})$

$$f_{1i}^{(0)}=\rho\beta\left[1+3(e_{1i}\cdot u)+\frac{9}{2}(e_{1i}\cdot u)^2-\frac{3}{2}u^2\right] \tag{7}$$

対角線方向粒子；

$$f_{2i}^{(0)}=\frac{\rho\beta}{4}\left[1+3(e_{2i}\cdot u)+\frac{9}{2}(e_{2i}\cdot u)^2-\frac{3}{2}u^2\right] \tag{8}$$

(5) 流れの巨視的変数

格子ボルツマン法の定義では，格子点における流体の状態は，全粒子の状態を速度のモーメントをかけて足し合わせたものに等しい．流体の密度ρ，速度u，圧力pは分布関数$f_{\sigma i}$を用いて以下の式で定義される．

$$\rho=\sum_{\sigma,i}f_{\sigma i} \tag{9}$$

$$u=\frac{1}{\rho}\sum_{\sigma,i}f_{\sigma i}e_{\sigma i} \tag{10}$$

$$p(x,t)=\frac{1}{3}\rho(x,t) \tag{11}$$

3. 数値解析例

数値解析例として，正方形キャビティ内対流問題を取り上げ，本手法の有効性について検討した．正方形領域の上面に$u=1.0$を与え，その他の壁面は*non-slip*条件とした．境界上では，局所平衡分布関数に流速を代入して得た局所平衡分布を粒子分布として与える計算[3]を行った．Reynolds数は10^3および10^4について計算を行った．Reynolds数10^3においては，各辺を32，128分割した格子を用いて比較した．Reynolds数10^3における計算結果を図-2,3 に示す．32分割の場合には，流速分布が振動し，あまり正しい解が得られていない（図-2）．これは，壁面付近も中心部分も一様な格子を用いているため粗い格子では精度が落ちたものと思われる．格子分割数を増やしていくと，参照解に近い値が得られた（図-3）．計算時間は，32分割の場合7分，128分割の場合13時間程度であった（Alpha21164 600MHz使用時）．記憶負荷は32分割で900kB，128分割で3MBであった．

Reynolds数10^4においては，各辺を64，128，192，256分割した格子を用いた．格子分割数が256のもの以外では，いずれの計算も粒子分布関数が負となり，計算が破綻した．分割数が256の場合のみ計算の破綻は起きなかったが，壁面付近の流速が非常に大きくなり，参照解とは大きく異なる結果しか得られなかった．計算時間は，タイムステップ数が512万ステップ必要なため，約21日かかった．（Alpha21164 600MHz使用時）記憶負荷は，約12MBであった．格子ボルツマン法は，記憶負荷は少ないが，微小時間増分量を小さくとらなければならないため多くの計算時間が必要になる．

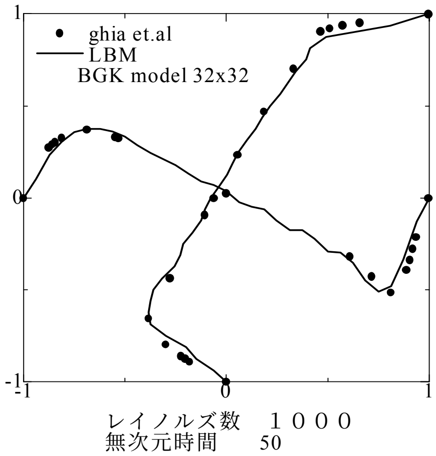

図-2．中心線上の流速分布 $Re=10^3$ **32分割**

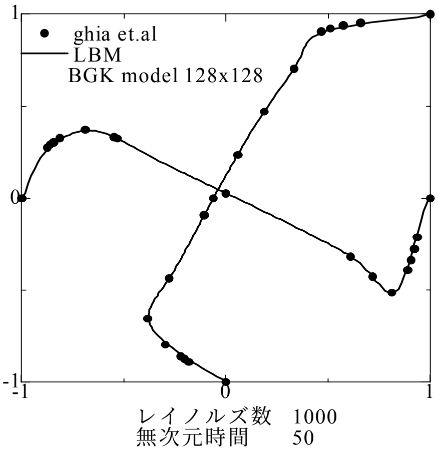

図-3．中心線上の流速分布 $Re=10^3$ **128分割**

4. おわりに

本報告では，格子ボルツマン法の非熱流体2次元9速度格子BGKモデルを用いて正方形キャビティ内対流問題の解析を行い，以下の結論を得た．

1. 粗い格子を用いた場合には流速分布が振動した解が得られ，精度が低かったが，格子分割数を増やすことで正しい解が得られた．
2. $Re=10^4$の計算では壁面付近の流速が大きくなり，有意な解は得られなかった．

今後の課題としては，

1. 高Reynolds数の計算についての検討をさらに行う．
2. 任意形状の境界を表現できるようにする．

などがあげられる．

参考文献

1) 蔦原道久,高田尚樹,片岡武 :”格子気体法・格子ボルツマン法” :コロナ社 :1999
2) 今村太郎,鈴木宏二郎,中村孝,吉田正廣,福田正大 : ”格子ボルツマン法による高レイノルズ数円柱周り流れの解析” : 第15回数値流体力学シンポジウム講演論文集 :B14-3 :2001
3) 蔦原道久,冨山明男,高田尚樹,山越康弘,吉田昌弘 : ”格子ボルツマン法における流れの境界条件について” : 第8回数値流体力学シンポジウム講演論文集 :pp511-514 : 1994