

安定化有限要素法による密度成層を考慮した地形風解析

中央大学 学生員 清水 隆博
中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

本研究は、安定化有限要素法による密度成層を考慮した地形風解析のための数値解析手法の構築を行うものである。基礎方程式に、*Boussinesq*近似を仮定したナビエ・ストークスの運動方程式、離散化手法として、非構造格子に基づく $P1/P1$ 要素による安定化有限要素法 (*SUPG/PSPG* 法) を用いた。本手法を二次元の半円柱と実地形周りの地形風解析に適用し、既存の実験結果との比較により、本手法の妥当性について検討した。また、流出境界条件の処理方法として、*Sommerfeld* の放射条件の導入を行った。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式と離散化

二次元の非圧縮粘性流れを考える。密度は鉛直方向に一定な勾配 ($d\rho/dz = -1$) の基本場 $\rho_B(z)$ をもち、*Boussinesq* 近似を仮定する¹⁾。そのときの、無次元化された基礎方程式はそれぞれ以下のように表される。運動方程式；

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \frac{1}{Re} (u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \frac{1}{Fr^2} \rho k = 0 \quad (1)$$

連続式；

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

密度方程式；

$$\dot{\rho} + u_i \rho_{,i} = u_i k \quad (3)$$

u は流速, p は圧力, ρ は同じ高さ Z における無限上流での基本場 $\rho_B(z)$ からの密度のずれ, $Re (= LU/\nu)$ は *Reynolds* 数, $Fr (= U/Nh)$ は *Froude* 数をそれぞれ表している。ここに, h は物体高さ, N は *Brunt-Väisälä* 振動数で $N^2 = -(g/\rho_0) \cdot (d\rho/dz)$ で定義される。また, 無次元成層パラメータ K は $K = NH/\pi U$ で定義される。

(2) 安定化有限要素方程式

基礎方程式 (1),(2),(3) に対して, *SUPG/PSPG* 法²⁾ に基づく安定化有限要素法を適用し, $P1/P1$ 要素を用いて補間を行うと次の有限要素方程式を得る。

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) \dot{u}_i + (\mathbf{K}(u_j) + \mathbf{K}_\delta(u_j)) u_i \\ & - (\mathbf{C} - \mathbf{C}_\delta) p + \frac{1}{Re} \mathbf{S} u_i + (\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) \rho k = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{C}^T u_i + \mathbf{M}_\varepsilon \dot{u}_i + \mathbf{K}_\varepsilon(u_j) u_i + \mathbf{C}_\varepsilon p = 0 \quad (5)$$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) \dot{\rho} + (\mathbf{K}(u_i) + \mathbf{K}_\delta(u_i)) \rho - (\mathbf{M} + \mathbf{M}_\delta) u_i k = 0 \quad (6)$$

ここで, $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}, \mathbf{S}$ は, 係数行列であり, 添字 δ, ε は, それぞれ *SUPG* 項, *PSPG* 項に起因するものを表わす。

式 (4),(5),(6) に対して時間方向に *Crank-Nicolson* 法を用いて離散化し, *Element by Element BiCG STAB2* 法により連立1次方程式を解規, $n+1$ ステップの解を求める。

Key Word: 安定化有限要素法, 地形風解析, 密度成層, $P1/P1$ 要素
〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27
TEL 03-3817-1815, FAX 03-3817-1803

3. 数値解析例

(1) 二次元半円柱

a) 計算条件

流体は, 非圧縮粘性流体とし, 解析領域, 境界条件は図-1のように設定した。解析に用いたメッシュの節点数は11,025, 要素数は21,360である。図-2に半円柱近傍のメッシュ図(最小メッシュ幅0.0087h)を示す。なお, 計算は表-1に示すような成層度 K について行った。*Reynolds* 数と微小時間増分量は全ての成層度について, それぞれ $Re = 2000$, $\Delta t = 0.01$ とした。

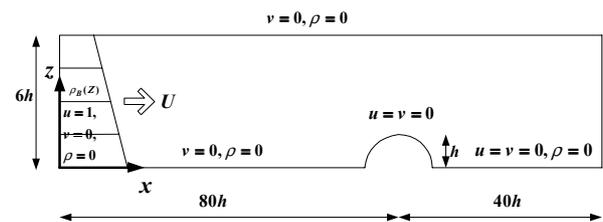


図-1 解析領域, 境界条件

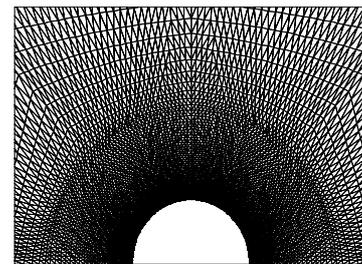


図-2 半円柱近傍のメッシュ図

K	0.02	1.0	1.8	2.5	3.0	4.0
Fr	100	1.91	1.06	0.76	0.64	0.48

表-1 計算条件

b) 解析結果

図-3に各成層度 K での流線図を示す。いずれの成層度においても, 二次元半円柱周囲の流れは強い非定常性を示していることが分かる。これらの結果より, 成層度の増加とともに渦が抑制され, 放出周期が短くなっていることが確認できた。また, *Froude* 数が1より小さくなると, 反射波の影響で円柱前方にも影響が出ることが分かる。

図-4に, 成層度 K と二次元半円柱後方での再付着距離との関係を示す。再付着距離については, 無次元時間125~175の平均値と最短距離をプロットした。比較として, 大屋らによる実験と計算結果¹⁾も示した。成層度の増加とともに再付着距離が短縮するという定性的な現象を捉えることはできているが, 大屋らの実験, 計算結果とは多少の差異があることが分かる。その原因として, 地面境界層の分割数や三次元性による影響等が考えられる。また, 再付着距離は流線図からの可視化によって行っており, 再付着点を厳密に判断するのが難しいことにも起因している。

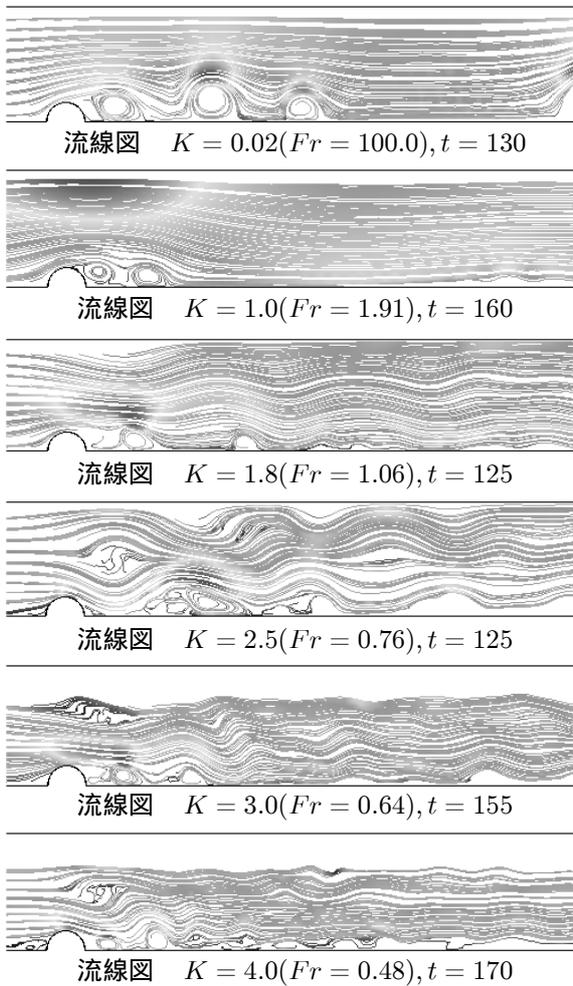


図-3 各成層度における流線図(最短距離)

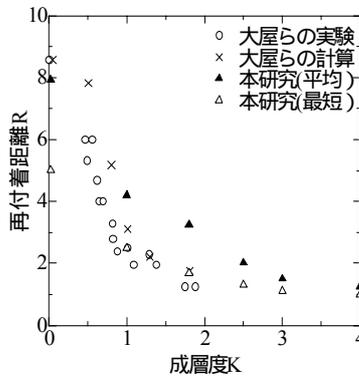


図-4 再附着距離の成層度 K に対する変化

(2) 二次元実地形

a) 計算条件

応用的な数値解析例として、二次元実地形を取り上げた。対象の地形は熱海付近のもので、断層が多数存在する複雑な地形である。領域として、主流方向に約5.7kmとり、鉛直方向には、山の高さの6倍をとった。分割数は主流方向に228分割、鉛直方向に50層積み上げた。総節点数は11,628、総要素数は22,700、最小メッシュ幅は0.016hである。計算領域、境界条件は図-5に示している。計算は成層度 $K = 0.02$ (中立流) について行い、*Reynolds* 数と微小時間増分量は、それぞれ $Re = 2000$ 、 $\Delta t = 0.01$ とした。また、流入風速として、 u に $u = (z/z^*)^{1/4}$ を与えている。

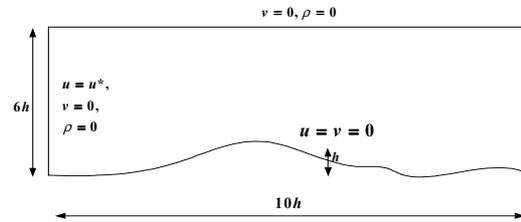


図-5 解析領域, 境界条件

b) 解析結果

図-6は、流出境界条件としてトラクションがフリーの場合の解析結果 ($time = 35$) であるが、この後、解は発散した。 $time = 35$ 付近は、ちょうど渦が流出しているときであり、この強い渦の流出が解の発散の原因であると考えられる。

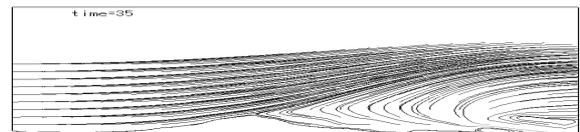


図-6 流線図 $K = 0.02, t = 35$ (トラクションフリー)

地形風を解析する上で、上記の結果のように、流出境界条件が計算の安定性に大きく依存することが明らかとなった。そこで、流出境界条件として、*Sommerfeld* の放射条件を用い、その有効性を検討した。この手法は、流出境界付近で流体は以下の式に支配されると仮定したものである。

$$\dot{u}_i + cu_{i,i} = 0 \quad (7)$$

ここでは、伝播速度 c として流出境界付近の流速の平均値を与え、図-7はその解析結果 ($time = 35$) である。この手法を用いることにより、流出口で流速が移流し渦が強制的に放出されるので、解が発散せず妥当な結果が得られていることが分かる。

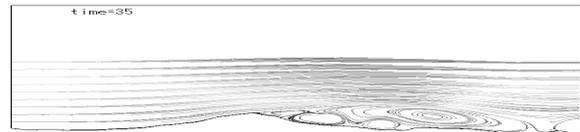


図-7 流線図 $K = 0.02, t = 35$ (放射条件)

4. おわりに

本研究では、密度成層を考慮した地形風解析のための安定化有限要素法を提案し、二次元半円柱、二次元実地形を過ぎる安定成層流の解析に適用した。これより、以下の結論を得た。

- 実験結果とは多少差異があるが、成層度 K の違いによる流況の変化を捉えることができた。
- 流出境界処理としては、*Sommerfeld* の放射条件が有効であることが明らかとなった。

今後は、流出境界処理の更なる検討と、反射波の処理の検討を行う予定である。

参考文献

- 1) 大屋裕二, 小園茂平, 松尾浩一郎, 前田明記: 地上の2次元半円柱を過ぎる安定成層流の風洞実験と数値解析: 第12回風工学シンポジウム: pp13-18: 1992
- 2) T.E.Tezduyar, S.Mittal, S.E.Ray and R.Shih: 'Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements' : *Compter Methods in Applied Mechanics and Engineering* :95: pp221-242 :1992