

部分変分法による Semi-Helmholtz 要素の非圧縮流への適用

IMI 計算工学研究室(理研研究嘱託) 今村 純也

1. 目的

Helmholtz の定理は、「任意のベクトル場 $\mathbf{U}$ は一般にスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ によって、 $\mathbf{U} = \text{grad } \phi + \text{curl } \boldsymbol{\psi}$ ($\text{div } \boldsymbol{\psi} = 0$) のごとく表わされる」と定義⁽¹⁾される。非圧縮粘性流の流速ベクトル場は $\mathbf{U} = \text{curl } \boldsymbol{\psi}$ となり、ベクトル場が渦度では $\boldsymbol{\omega} = \text{curl } \mathbf{U}$ ($\text{div } \mathbf{U} = 0$) となる。

2D の差分法では $\boldsymbol{\psi}$ と $\boldsymbol{\omega}$ を変数とする $\boldsymbol{\psi}$ - $\boldsymbol{\omega}$ 法が古典的手法としてよく知られている。しかし、境界条件の与え方が難しく、3D への発展が容易でないとされ、基礎変数 ($\mathbf{U}$ および圧力 P) を用いる方法が主流となっているのが現状で、有限要素法でも同様の状況にある。

しかし、基礎変数要素 U_i はそれぞれ独立して定義されるため、一般には $\text{curl } \boldsymbol{\psi}$ のみならず $\text{grad } \phi$ も入り込むことになる。非圧縮粘性流では後者は単なるモデル誤差であり、偽ポテンシャル⁽²⁾として取り除く必要がある。基礎変数要素ではそのスキーム構築がメインテーマとなる。

渦度はポテンシャル表現すれば $\boldsymbol{\omega} = \text{curl}(\text{curl } \boldsymbol{\psi})$ であり、渦度輸送方程式は $\boldsymbol{\psi}$ の 4 階微分方程式で表わされる。したがって、 $\boldsymbol{\psi}$ が C_1 連続な要素を適用すれば流速は要素間境界で連続し、系の境界条件も厳密に満足させ得るので上述の $\boldsymbol{\psi}$ - $\boldsymbol{\omega}$ 法の隘路は解消される。著者はこの点に着目して、基底関数を Helmholtz 表示した C_1 連続な要素の適用法を報告⁽⁴⁾⁽⁵⁾してきた。

しかし、 C_1 連続な要素を必要とする点で一般には馴染みにくい面がある。また、ノード未知数がベクトルとなるため未知数自由度 (3D でノードあたり 12) の肌目細かな配分 (アダプティブ法) には多少難がある。

そこで昨年度本大会で semi-Helmholtz 要素を提案⁽⁷⁾した。この要素は基礎変数要素であるが、双 1 次要素のノード自由度数が 3 (流速) であるのに対し、隅ノード換算で 2 倍となる。余分の自由度は連続条件を満たすために使って Helmholtz 要素に近づけ、上述の利点が享受できるようにする狙いがある。

本稿では semi-Helmholtz 要素 $\mathbf{U}$ から $\text{curl } \boldsymbol{\psi}$ および

$\text{div } \mathbf{U}$ を掘り上げ、前者は移流項に適用し、偽ポテンシャルである後者は系から除去するスキームを検討する。

$\text{div } \mathbf{U}$ の除去手法としてペナルティ法⁽⁴⁾がよく知られている。本稿ではペナルティ法の問題点を考察し、これを改良したスキームを提案する。スキームは 2D 流れて数値的に検証する。

結論的には、Helmholtz 要素と提案要素の優劣はまだ付け難いが、一定の成果を得たので報告する。

2. Semi-Helmholtz 要素と方法

2.1 方程式

U_i は semi-Helmholtz 要素の流速、 S_{ij} はその変形速度テンソル、 β_i は $\boldsymbol{\psi}$ 要素の流速、 ν は動粘性係数、 P は圧力とし、密度は基準化して表して、連続の式は (1) 式、運動方程式は (2) 式とする。

$$\text{連続の式:} \quad \text{div } \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動方程式:} \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\beta_i \beta_j - \nu S_{ij}) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

ただし、 $\boldsymbol{\beta} \equiv \text{curl } \boldsymbol{\psi}$, $\text{div } \boldsymbol{\psi} = 0$ (coulomb のゲージ)

2.2 有限要素

(1) U 要素

流速 U_i は i 方向には中間ノードを設定して 2 次式とし、他の方向には線形とする。ノード配置は u と v の要素の例では図-1 となる。(U_i は u , v , w でも表示) w 要素は省略するが、同様にして z 方向のみ 2 次となる。

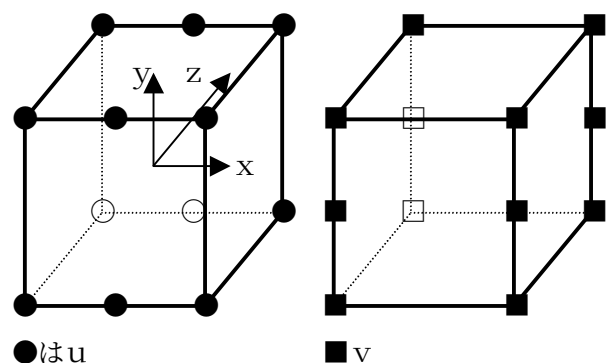


図-1 六面体の u および v 要素のノード配置

(2) ψ 要素

ψ は2Dで矩形、3Dで六面体の双1次要素とする。

2.3 ペナルティ法の考察

ペナルティ係数を λ として $\lambda/2 \cdot \delta(\text{div } \mathbf{U})^2$ 項をガレルキン式に加えて解く方法である。欠点として、 λ 値の物理的根拠に乏しいこと、ペナルティ項を特異とするための次数低減積分法も同様なことである。

エネルギーの観点からはさらに次の点が指摘できる。すなわち、ペナルティ項により $(\nu + \lambda)/2 \cdot (\text{div } \mathbf{U})^2$ のエネルギー散逸（吸い込み）を常に伴うことである。この項は単なるモデル誤差でしかない。

なお、基礎変数要素では常に最小でも $\nu/2(\text{div } \mathbf{U})^2$ のエネルギー吸い込みを伴っている。（これを排除できることが Helmholtz 要素の利点と言える。）

2.4 部分変分法の適用

そこで、はじめの狙いを部分変分法の形で表現する。すなわち、(1)式の重みつき残差式に中間ノード未知数の変分式を充て、(2)式のガレルキン式+(1)式のペナルティ式には隅点ノード未知数の変分式のみ充てる。かつ、比較的小さな λ を用いる。これにより、前述した3つの欠点は解消される。

2.5 連立方程式

(2)式は $\mathbf{U}$ を未知数とし、 ψ および境界値を与えて部分変分のガレルキン法で解くことになるが、これに陰解法を適用する。その際、ガレルキン式からは圧力勾配は消滅するので圧力要素は必要としない。

ψ は $\mathbf{U}$ を与えて求めるので、連立させて解く必要がある。ここでは、 ψ に関する非線形式であることを考慮し段階的解法で反復計算する。

すなわち (3)式から ψ を求め、(1)式の間ノード未知数による部分変分式と(2)式の隅ノード未知数による部分変分式を連立させて解く。以上を反復計算する。

$$\int_{\Omega} \delta(\beta_i - U_i)^2 d\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \quad (3)$$

以上はスキームの骨子であり、実際には上流化のほか、なおいくつかの手当てを加える必要がある。

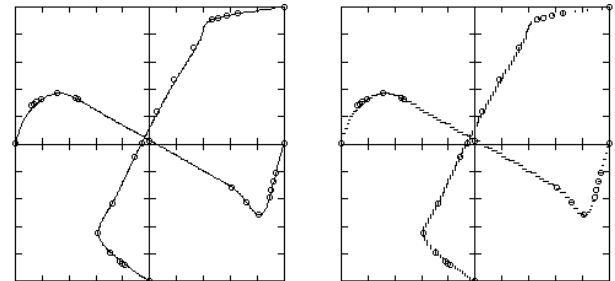
3. 数値計算例

Re 数 $=1 \times 10^3$ の2Dキャビティフローで検証した。要

素数は不等分割 80×80 要素で、 $\Delta t = 1/500$ とした。

移動壁速度は端から5要素区間で3次補間して立ち上げ、ノード点での値を境界値として与えた。（隅で $u=0$, $\omega=0$ であり、垂直壁上端での噴流を防止）

$\mathbf{U}$ と β のプロファイルを Ghia らの結果のとともに図-2に示す。両者ともよく一致していることが判る。



(a) $\mathbf{U}$ の値

(b) β の値

図-2 幾何学中心線上の流速プロファイル

($Re=1 \times 10^3$, $t=30$) (○ は Ghia et al.)

4. まとめ

Helmholtz 表示要素の利点を生かしながら、低次の semi-Helmholtz 要素を提案し、その適用法を報告した。

数値計算による検証でも、Ghia らの結果とよく一致することを確認した。また、 $\mathbf{U}$ 要素の流速と ψ 要素から求まる流速がよく一致することも確認した。

C_1 連続な Helmholtz 要素との優劣は3D解析に依らなければ判じ難い面が多い。Helmholtz 要素は連続式を強解として満足するなど理論的整合性が高く、数値積分は並列処理可能であるなど、数値解析上の魅力も有している。

参考文献

- (1) 例えば "数学ハンドブック" 丸善, (1960), pp. 258.
- (2) 今村, 棚橋, "基礎変数表示の流れから偽ポテンシャル成分を控除する方法による非圧縮流体の数値解法" 計算工学講演会論文集, 第5巻第1号, (2000), pp. 159.
- (3) 今村, "C₁連続なFEMモデルの非圧縮流体への適用" 第11回数値流体力学講演論文集, (1997), pp.567
- (4) 今村, 棚橋, "Helmholtz 表示要素を用いたエネルギー保存スキームへの乱流モデルの適用" 計算工学講演会論文集, 第6巻第1号, (2001), pp. 245.
- (5) 今村, "Helmholtz 表示要素に準ずる基礎変数表示要素の提案" 土木学会, 第56回年次学術講演会概要集, (2001)
- (6) 矢川元基, "流れと熱伝導の有限要素法入門" 培風館, (1983), pp63, pp167
- (7) U.Ghia, K.N.Ghia and C.T.Shin "High-Re Solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", Journal of Computational Physics 48, (1982), pp387-411.