

有限要素法を適用した動的緩和法による PC クラスタ型並列計算処理

日本電子計算(株) 正 会 員 竹原 和夫 関西大学工学部 フェロー 三上 市蔵
 関西大学大学院 学 生 員 ○ 狩野 哲也 関西大学大学院 学 生 員 濱谷 秀一

1. まえがき

構造工学の分野において、弾塑性解析や有限変位解析など種々の非線形解析を行う場合、あらゆる計算機のピーク性能を引き出すのは容易ではない。有限要素法、差分法などで遭遇する大型の連立方程式を解くには反復解法が適しているが、一般に解法やプログラミングに種々の工夫が必要になる。反復解法の一つである動的緩和法 (Dynamic Relaxation Method) は、個々の反復計算は簡単な代数計算であり、プログラミングも比較的容易である。通常、場と時間に関して差分法で離散化¹⁾されるが、場に関しては有限要素法でも離散化可能²⁾³⁾である。むしろ、有限要素法の方が任意に要素分割できることから、様々な形状の構造物を解析する点で有利である。非線形問題の塑性域においては、各断面について、つり合いを満足する応力分布を決定するため、ひずみ分布の調整を行わなければならない。有限変位解析とあわせて2種の繰り返し計算が必要となる。そこで動的緩和法が動的つり合い式を対象とすることに着目し、振動の方程式の他に各方向の運動方程式をも考慮に入れる。この方法によれば、つり合い方程式を満足する応力分布は時間に関する繰り返し計算のみにより定まる。つまり、動的緩和法本来の定式化がされれば、弾塑性解析や有限変位解析などの種々の非線形解析への応用が容易になる。

一方、解析を行う計算機としては並列計算機、その中でも一般に使用されている PC をネットワーク結合して構築する PC クラスタ型並列計算機が注目を集めている。これはスーパーコンピュータと同程度の性能を比較的安価に構築できるが、PC 台数増加に伴うデータ通信時間の増加から全体の処理速度向上率が低下し、現在では適用範囲に制限がある。本研究では、有限要素法を適用した動的緩和法を PC クラスタにおける並列計算に実装する。

2. 動的緩和法基本方程式

有限要素法を適用した動的緩和法の基本方程式を誘導する。図-1 に示すような各節点 6 個の変位成分をもつ四辺形要素を考える。まず、式に用いる文字の定義を以下に示す。

要素内の節点力ベクトル，節点変位ベクトルをそれぞれ

$$\{f\} = \{ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \}^T \dots\dots\dots (1a)$$

$$\{\delta\} = \{ \delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \}^T \dots\dots\dots (1b)$$

とする。また、要素の構成節点 1 における節点力成分および節点変位成分をそれぞれ

$$\{f_1\} = \{ N_{x1} \ N_{y1} \ Q_1 \ M_{x1} \ M_{y1} \ M_{z1} \}^T \dots\dots\dots (2a)$$

$$\{\delta_1\} = \{ u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \}^T \dots\dots\dots (2b)$$

とする。その他節点 2, 3, 4 についても同様とする。

動的緩和法の反復計算において、剛性方程式を適用する。まず、よく知られている仮想変位の原理から、

$$\{\delta^*\}^T \{f\} = \int (\varepsilon_x^* \sigma_x + \varepsilon_y^* \sigma_y + \gamma_{xy}^* \tau_{xy}) dV \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\{\delta^*\}$ は仮想変位ベクトル、 ε_x^* 、 ε_y^* 、 γ_{xy}^* は要素内仮想ひずみ、 σ_x^* 、 σ_y^* 、 τ_{xy}^* は要素内応力を示す。よって、変位から節点力を導く関係式は次の式を適用する。

$$\{f\} = \left(\iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz \right) \{\delta_1\} \dots\dots\dots (4)$$

次に断面力から変位速度を求めるために、時刻 $p-1/2$ における節点 i についてのつり合い式に慣性項と減衰項を付加した以下の運動方程式を用いる。

$$m_u \frac{\partial \dot{u}_{i,p-1/2}}{\partial t} + C_u \dot{u}_{i,p-1/2} + \left(\sum_j N_{xij} \right)_{p-1/2} = F_{u \ i,p-1/2} \dots\dots\dots (5a)$$

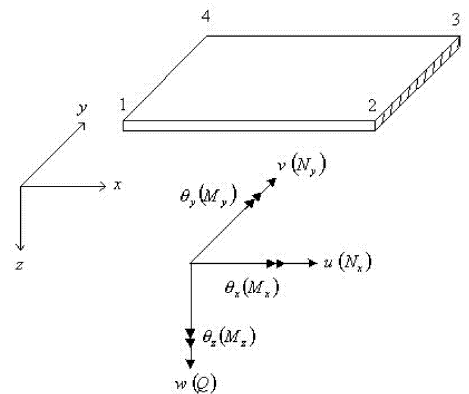


図-1 四辺形要素

Key Words: 動的緩和法, PC クラスタ, 有限要素法

〒 564 大阪府吹田市山手町 3-3-35

$$m_v \frac{\partial \dot{v}_{i,p-1/2}}{\partial t} + C_v \dot{v}_{i,p-1/2} + \left(\sum_j N_{yij} \right)_{p-1/2} = F_{v_{i,p-1/2}} \quad \dots\dots\dots (5b)$$

$$m_w \frac{\partial \dot{w}_{i,p-1/2}}{\partial t} + C_w \dot{w}_{i,p-1/2} + \left(\sum_j Q_{ij} \right)_{p-1/2} = F_{w_{i,p-1/2}} \quad \dots\dots\dots (5c)$$

$$m_{\theta_x} \frac{\partial \dot{\theta}_{x_{i,p-1/2}}}{\partial t} + C_{\theta_x} \dot{\theta}_{x_{i,p-1/2}} + \left(\sum_j M_{xij} \right)_{p-1/2} = F_{\theta_{x_{i,p-1/2}}} \quad \dots\dots\dots (5d)$$

$$m_{\theta_y} \frac{\partial \dot{\theta}_{y_{i,p-1/2}}}{\partial t} + C_{\theta_y} \dot{\theta}_{y_{i,p-1/2}} + \left(\sum_j M_{yij} \right)_{p-1/2} = F_{\theta_{y_{i,p-1/2}}} \quad \dots\dots\dots (5e)$$

ここで、 F は各変位成分に対応した節点荷重、 j は節点 i に隣接する要素を示す。

また変位速度から変位を導くため、変位速度を時刻 p において中央差分表示した以下の結合方程式を用いる。

$$\dot{u}_{i,p} = \frac{\partial u_{i,p}}{\partial t} = \frac{u_{i,p+1/2} - u_{i,p-1/2}}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (6a)$$

$$\dot{v}_{i,p} = \frac{\partial v_{i,p}}{\partial t} = \frac{v_{i,p+1/2} - v_{i,p-1/2}}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (6b)$$

$$\dot{w}_{i,p} = \frac{\partial w_{i,p}}{\partial t} = \frac{w_{i,p+1/2} - w_{i,p-1/2}}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (6c)$$

$$\dot{\theta}_{x_{i,p}} = \frac{\partial \theta_{x_{i,p}}}{\partial t} = \frac{\theta_{x_{i,p+1/2}} - \theta_{x_{i,p-1/2}}}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (6d)$$

$$\dot{\theta}_{y_{i,p}} = \frac{\partial \theta_{y_{i,p}}}{\partial t} = \frac{\theta_{y_{i,p+1/2}} - \theta_{y_{i,p-1/2}}}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (6e)$$

式(4)(5)(6)が動的緩和法の3つの基本式である。解の改良を繰り返しながら反復計算を行う。

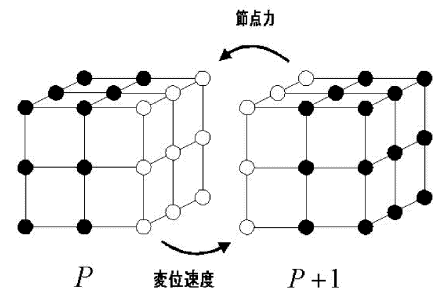


図-2 並列化モデル

3. PC クラスタを用いた数値計算への適用

剛性方程式の作成と動的緩和法による収束計算に並列処理を施すために、MPI に準拠したライブラリ MPICH1.2.1 を適用する。式(4)において変位からひずみ、ひずみから応力、応力から断面力を算出する段階を完全に独立して解くことができることから、この解析手法は分割された領域を複数の各 PC に配分するという並列化に適したアルゴリズムであると考えられる。しかし式(5)の断面力から変位速度を算出する段階において、節点でのつり合いをとるために領域の境界部分を調整する必要が生じる。その際には図-2のように領域 $P+1$ の境界における節点力を隣接した領域 P の境界節点に受け渡す。そして、 P において境界節点のつり合い式から変位速度を導き、 $P+1$ の境界節点に返す通信を行うこととする。解析の流れを図-3に示す。

4. あとがき

本研究では、PC クラスタ型並列計算機において動的緩和法を適用した有限要素解析を行う。その他、詳細は講演にゆずる。

参考文献

- 1) 三上市蔵, 三浦泰夫, 辻本敦恒, 田中成典: 動的緩和法による鋼薄肉変断面はり - 柱の面内強度解析, 構造工学論文集, 土木学会, Vol. 33A, pp. 247-256, 1987. 3
- 2) Al-Shawi, F.A.N.: Dynamic relaxation technique for the solution of finite element equations in structural analysis, Bull. Coll. Engng.5, pp.155-177, 1981.
- 3) Lynch, R.D., Kelsey, S., and Saxe, H.C.: The Application of Dynamic Relaxation to the Finite Element Methods of Structural Analysis, Technical Report No. themis-und-68-1, Univ. of Notre Dame, 1968.

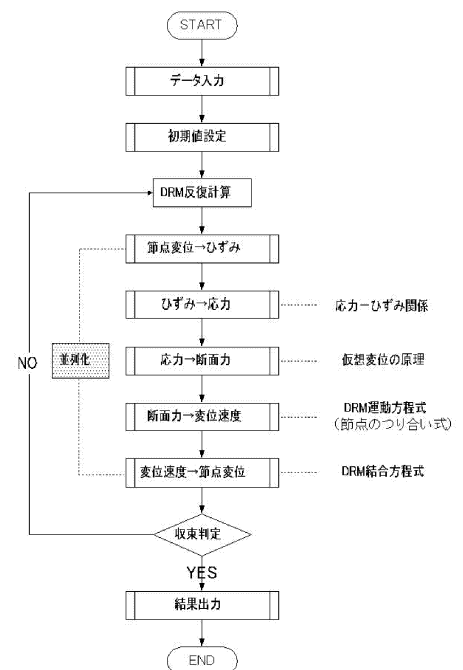


図-3 解析フロー