

並列 BIEM による 3 次元時間域動弾性問題の解法

京都大学大学院 学生会員 ○吉川仁
 京都大学工学研究科 正会員 西村直志
 福井工業大学工学部 フェロー 小林昭一

1 序論

時間域の境界積分方程式法 [1] では、解が時間に関する畳み込み積分の形で表現されるため、ある時刻における解は、過去の全履歴の影響を受ける。このため、実用的な計算時間で数値解析を行なうためには各時間ステップにおいて計算される影響係数を記憶する必要がある。しかし単一の計算機では記憶容量の制限により解ける問題のサイズは限られてしまう。この問題を解決するために MPI[2] による並列化を導入する。並列化により、影響係数の計算、記憶を各プロセッサに分割する事で大規模問題の取り扱いが可能になる。一般に境界積分方程式法は得られる係数行列が密であることから、有限要素法などに比べてかえって単純に並列化できるが、時間域の境界積分方程式法では係数行列が疎になる事を考慮した並列化が必要となる。本論文では、動弾性クラック問題を並列化境界積分方程式法を用いて解き、その有効性を示す。また、並列化による大規模動弾性問題の解析例も示す。

2 動弾性クラック問題の定式化

3 次元無限弾性体 D に存在する単一クラック S による入射波 u^{in} の散乱問題を考える。未知の変位場 u について次の初期値境界値問題を解く。

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u = \rho \ddot{u} \quad \text{in } D \setminus S \times (t > 0), \quad (1)$$

$$T u^\pm = 0 \quad \text{on } S \times (t \geq 0),$$

$$u^{sc}|_{t=0} = \dot{u}^{sc}|_{t=0} = 0 \quad \text{in } D \setminus S,$$

$$u(x) \rightarrow u^{in}(x) \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty, \quad (2)$$

$$\varphi = u^+ - u^- = 0 \quad \text{on } \partial S. \quad (3)$$

ここで、 μ, λ はラメ定数、 ρ は密度、 T はトラクション作用素、 $+$ ($-$) はクラックの単位法線ベクトルの正 (負) からの極限値である。また、 $(\dot{\cdot})$ は時間微分を表し、 $u^{sc} = u - u^{in}$ である。(1) 式に対応するクラック問題の境界積分方程式は次のように書ける。

$$-T u^{in}(x, t) = \text{p.f.} \int_S T \Gamma_I(x, y, t) * \varphi(y, t). \quad (4)$$

ここに、 $\Gamma_I(x, y, t)$ は二重層核、 $*$ は時間に関する畳み込み積分、p.f. は発散積分の有限部分である。

(4) 式を空間域で区分一定の内挿関数 N^q 、時間域で区分線形の内挿関数 M^ℓ を用いて離散化し次の代数方程式を

得る。

$$A_{ij}^{pq}(\Delta t) \varphi_j(y^q, n\Delta t) = T u_i^{in}(x^p, n\Delta t) + \sum_{\ell=1}^{n-1} A_{ij}^{pq}((n+1-\ell)\Delta t) \varphi_j(y^q, \ell\Delta t), \quad (5)$$

$$A_{ij}^{pq}(\ell\Delta t) = \int_S \int_S (T \Gamma_I)_{ij}(x^p, y, t) M^\ell(t) N^q(y) dt dy,$$

$$N^q(y) = \begin{cases} 1 & y \in S_q, \\ 0 & y \notin S_q, \end{cases}$$

$$M^\ell(t) = \begin{cases} \frac{t - (\ell-1)\Delta t}{\Delta t} & (\ell-1)\Delta t \leq t \leq \ell\Delta t, \\ \frac{(\ell+1)\Delta t - t}{\Delta t} & \ell\Delta t \leq t \leq (\ell+1)\Delta t, \\ 0 & t \leq (\ell-1)\Delta t, t \geq (\ell+1)\Delta t. \end{cases}$$

ここで、 x^p, y^q は、境界要素領域 S_p, S_q の代表点、 Δt は時間ステップ幅である。

考えるクラックは、半径 a の円形クラックで、入射波は法線方向 (x_3 方向に一致) に進行する平面 P 波で $\sigma_{33} = p$ で一定とする。Poisson 比 $\nu = 0.25$ 、時間ステップ幅は $\Delta t = 0.09a/c_T$, ($c_T = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$) とし、クラックの開口変位を求める。なお、境界要素数は 2680 で、 $A_{ij}^{pq}(\ell\Delta t)$ は 8040 元の行列である。

3 並列化

各時間ステップで必要となる係数行列 $A_{ij}^{pq}(n\Delta t)$ の計算、記憶、(5) 式右辺の行列ベクトル積演算を複数台のプロセッサで分割し実行する。静的な境界積分方程式法では係数行列は密であるが、時間域の問題では source からの波動が時間内に到達しない点には影響が現れないことから係数行列は疎となる。行列の分割方法には主にブロック分割 (Fig.1) とサイクリック (Fig.2) 分割の 2 つがあるが、疎行列を分割する場合はロードバランスが均等になる分割方法を選ぶ事が望ましい。

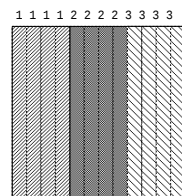


Fig.1 ブロック分割

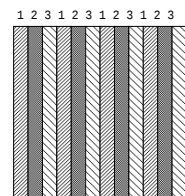


Fig.2 サイクリック分割

そこで、3 台のプロセッサでブロック分割とサイクリック分割を行ない各プロセッサで計算される影響係数の数をタイムステップごとに示し、ロードバランスを比較する (表 1、表 2)。分割は source 側の要素を各プロセッサ

キーワード：並列計算、時間域境界積分方程式法

〒 606-8501 京都市左京区吉田本町 Tel 075-753-5115 FAX 075-753-5116

に割り当てる縦方向分割とする。また、Fig.3、Fig.4 にブロック分割、サイクリック分割で各プロセッサに割り振られる境界要素を示す。

表 1. 各プロセッサで計算される影響係数の数（ブロック分割）

time step	processor 1	processor 2	processor 3
1	71520	93513	72019
2	245190	268028	202390
3	466592	429122	357418
4	666335	544069	476728
5	847171	630644	580693
6	1017320	721370	671822
7	1196894	844792	767262
8	1384997	995058	880861
9	1541689	1199256	1029211
10	1586544	1399952	1228552
11	1478142	1534865	1417781

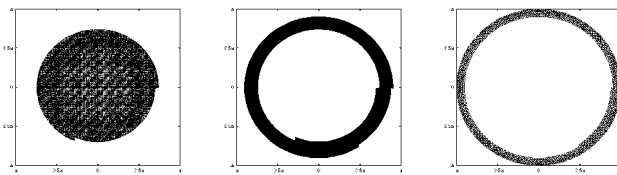


Fig.3 各プロセッサに割り振られる境界要素（ブロック分割）

表 2. 各プロセッサで計算される影響係数の数（サイクリック分割）

time step	processor 1	processor 2	processor 3
1	79012	79023	79017
2	238643	238645	238320
3	417809	417690	417633
4	561793	561210	564129
5	684435	683112	690961
6	801473	799266	809773
7	934411	932084	942453
8	1085914	1083744	1091258
9	1256441	1254467	1259248
10	1405458	1403699	1405891
11	1477794	1476176	1476818

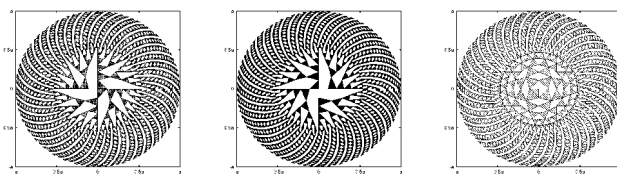


Fig.4 各プロセッサに割り振られる境界要素（サイクリック分割）

表 1、表 2 から、本報で取り扱う問題に関してはサイクリック分割が適していると言える。これは、クラックの中央付近の要素とティップ付近の要素とでは、source からの波動の影響範囲に含まれる境界上の選点数が異なるためである。

時間域の境界積分方程式法では、係数行列はバンド型になり、代数方程式の求解には多くの計算時間を要しないため、代数方程式の求解は 1 台のプロセッサ行なう。解法には繰り返し解法である GMRES を用いる。本報で用いた時間域 BIEM の並列化のアルゴリズムを Fig.5 に示す。

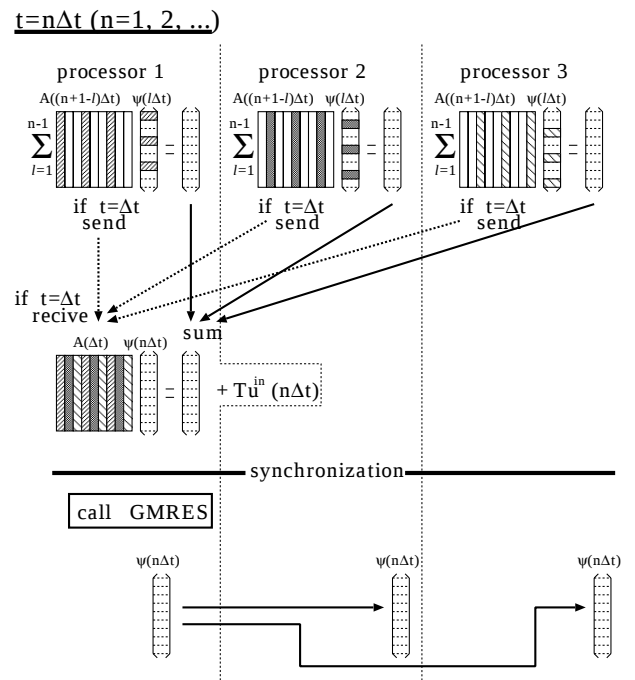


Fig.5 時間域 BIEM 並列化アルゴリズム

また、1 台から 8 台のプロセッサで並列計算を行ない、費やした計算時間を Fig.6 に示す。並列化により計算時間がほぼ台数分の 1 となっている事がわかる。また、クラックの開口変位の計算結果を Fig.7 に示す。なお、使用した計算機は全て Alpha EV67 (666Mhz) を cpu とする DEC 互換機である。

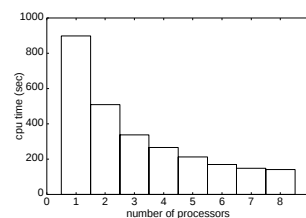


Fig.6 プロセッサ数と計算時間

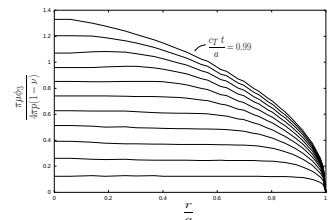


Fig.7 クラックの開口変位

4 大規模動弾性問題の並列解法

前節で示した並列時間域動弾性 BIEM を用いて、3 次元半無限弾性体に存在するクラックの決定問題を解く。境界要素数約 9000（未知数 27000）、時間ステップ数 130 の大規模問題を取り扱うため、解析には 8 台のプロセッサを使用する。得られた結果は、当日述べる事とする。

参考文献

- [1] 小林昭一 他: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000
- [2] 青山幸也: 並列プログラミング虎の巻 MPI 版, 日本 IBM 株式会社, 1999