Level Set 法による大規模自由表面流れの並列計算

国土交通省　正会員　○根本　深
日本工営　正会員　　桜庭雅明
中央大学　正会員　　樫山和男

1.　はじめに

近年，計算機と計算技術の発達により自由表面流れ問題の解明に数値解析が多く行われるようになってきている．自由表面流れ解析手法のうち，メッシュを空間に固定し自由表面を間接的に捉える界面捕捉手法は，砕波等の複雑な自由表面の形状を表現するのに優れた手法である．しかし，界面捕捉手法の解析精度はメッシュに大きく依存し，高精度な解析を行うためには細かな要素分割が必要となるため, 計算時間および計算機容量が増大するという問題が生じる．本研究は計算時間と計算機容量の軽減化を図ることを目的として, 界面捕捉手法の代表的手法である Level Set 法[1)]に並列有限要素法[2)]を導入し，並列化の効果について検討を行うものである．数値解析例として，ダムブレイク問題を解析し，計算精度及び並列化効率について検討を行った．

2.　数値解析手法

(1)　流れ場の計算

流れ場の計算における基礎方程式は，式 (1)，(2) に示す Navier-Stokes の運動方程式と連続式である．

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\nabla u - f\right) - \nabla\cdot\sigma = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot u = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \qquad (2)$$

ここに，ρ は密度，u は流速，f は物体力である．σ は応力テンソルであり，以下の式で表される．

$$\sigma = -pI + 2\mu\varepsilon(u) \qquad (3)$$

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^T\right) \qquad (4)$$

ここに，μ は粘性係数, p は圧力である．式 (1)，(2) に SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を用いて離散化を行い, 有限要素方程式を導くと以下の式のようになる．

$$\begin{aligned}(M + M_\delta)\frac{\partial u}{\partial t} &+ (K(u) + K_\delta(u))\,u \\ &- (C - C_\delta)\,p + \delta S u \\ &= E + E_\delta \qquad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C^T u + M_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} &+ K_\varepsilon(u)u \\ &+ C_\varepsilon p = F_\varepsilon \qquad (6)\end{aligned}$$

ここで, M,N,K,G,C は係数行列であり, F は外力ベクトルである．添字 δ, ε は, それぞれ SUPG 項, PSPG 項に起因するものを表わす．なお, 要素としては P1/P1 要素を用いた．時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を適用し，圧力及び連続式は陰的に扱った．なお，連立1次方程式の解法には Element-by-Element BiCG-STAB 法を用いた．

(2)　自由表面の計算

Level Set 法は自由表面から等距離になるような距離関数を与えて次式の移流方程式を用いて流れ場の値に従い界面を移動させる．

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\cdot(\nabla F) = 0 \qquad (7)$$

ここに F は距離関数として各点に符号付きで定義され, F=0 の等値面を界面とする．式 (7）に対して，SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用すると, 次のような有限要素方程式を得る．

$$(M + M_\delta)\frac{\partial F}{\partial t} + (K(u) + K_\delta(u))F = 0; \qquad (8)$$

ここで，M, K は係数行列であり，添字 δ は, SUPG 項に起因するものを表わす．時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を適用している．また, 連立一次方程式の解法には Element-by-Element BiCG-STAB 法を使用している．本報告は**図-1** のフローチャートに沿って解析した．なお, Level Set 法の詳細については文献[3)]を参照されたい．

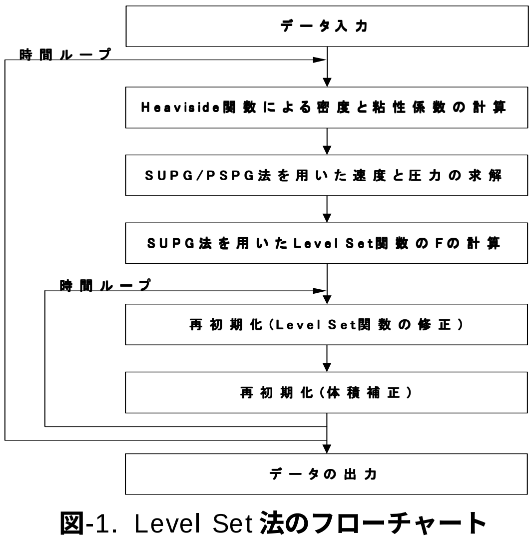


図-1. Level Set **法のフローチャート**

(3)　並列計算法

大規模な問題への適用を図るため，分散メモリー型並列計算機を用いた並列計算手法[2)]を適用している．領域分割法に基づく並列計算では，各プロセッサーは，割り当てられた部分領域のデータしか記憶しておらず，計算を行うには不十分である．この不足分を各プロセッサー間で通信を行うことで補完する．要素ごとのベクトルを全体系のベクトルに重ね合わせる際に行う隣接

Key Word: 並列計算，Level Set 法，PC クラスタ
〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27
TEL 03-3817-1815,FAX 03-3817-1803

プロセッサー間通信と，部分領域のベクトルの内積計算を全体領域で完成させる際に行う全プロセッサー間通信である．これらの通信を行うための通信ライブラリーにはMPI (Message Passing Interface) を用いている．使用した並列計算機の概要は **表-1** に示すとおりである．

表-1．PCクラスター型並列計算機の概要

CPU	PentiumIII
Clock cycle	866MHz
Cache size	L1 32kB / L2 256kB
Memory size	512MB
Network	100Base-Tx DEC 21140-AF

3. 数値解析例

本手法の計算精度と並列化効率を検討するためにダムブレイク問題の計算を行った．初期条件として，**図-2** に示す鉛直に置かれた板によって静止している水柱を考える．時間増分量はÅt = 1:0 Ç 10^{Ä3}secとし，有限要素として三次元の四面体要素を用いた．なお，密度および粘性係数は20℃における水と空気の値を用いた．境界はすべて固体壁としfree-slip条件を与えた．**図-3**，**図-4** はそれぞれ，**表-2** のメッシュLを用いた場合の自由表面形状と，水際線の時刻歴を実験結果[4)5)]と比較したものである．図より本手法は実験値に近い値を示しており，良好な結果が得られているといえる．

次に，本手法の並列化効率を検討するために，**表-2** に示す分割幅の異なる2種類のメッシュを用意して並列計算を行った．並列計算のための領域分割としてはスライス型に分割し，各領域の要素数が等しくなるようにした．並列計算におけるプロセッサー数は1，2，4，8台として，各台数における並列化効果の検討を行った．**図-5** に演算速度倍率と並列化効率を示す．メッシュSでは計算時間に対し通信に要する時間の割合が高いため，並列化効率は低くなるが，メッシュLでは比較的良好な並列化効率が得られており，大規模計算における本並列計算手法の有効性が示された．

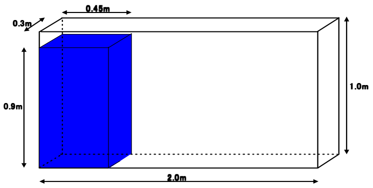
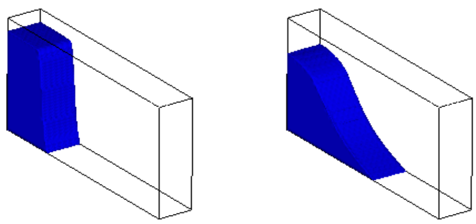


図-2 解析モデル



t=0.1[s] t=0.3[s]

図-3 自由表面形状の時刻歴

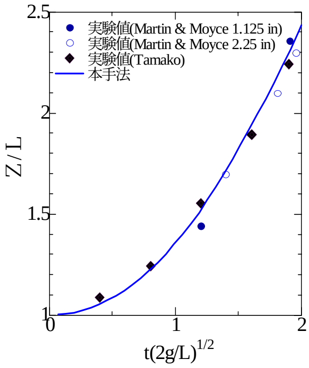


図-4 水際線の時刻歴

表-2 要素分割

	メッシュL	メッシュS
総節点数	43173	6027
総要素数	230400	28800
計算格子幅	2.5cm	5.0cm

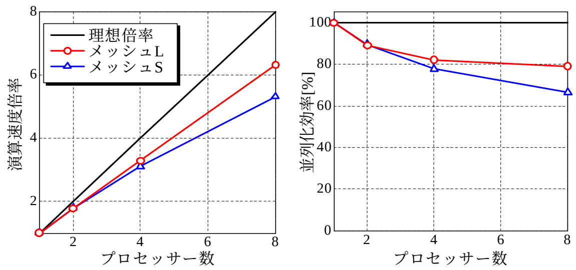


図-5 並列化効率

4. おわりに

本論文では，並列有限要素法を用いたLevel Set法による自由表面流れ解析手法について，計算精度の確認及び，並列化効率の検討を行い，以下の結論を得た．

- è 水際線の移動速度について，実験値と比較的良い一致を示し計算精度の観点から有効性が確認できた．
- è PCクラスター型並列計算機を用いた並列計算を行った結果，良好な並列化効率を得る事ができた．

今後の課題としては，各種問題へ適用を行うと共に，界面捕捉の精度向上に関する検討を行う予定である．

参考文献

1. M. Sussman, P. Smereca and S. Osher : A Level Set Approach for Computing Solutions for Incompressible Two-Phase Flow, J. of Comput.Physics,144. pp. 146-159.1994.
2. 桜庭雅明, 田中聖三, 樫山和男 : PCクラスタを用いたALE並列有限要素法による非線形自由表面流れ解析:応用力学論文集 Vol.4, pp113-120, 2001.
3. 羽田康浩, 桜庭雅明, 樫山和男 : Level Set法による自由表面流れの安定化有限要素解析:第57回年次学術講演会講演概要集 (投稿中)
4. J. C. Martin and W.J. Moyce. : An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, Phil. Trans. Roy. Soc. London A, Vol. 244, pp.312-324, 1952.
5. 玉古博朗 : 界面の分裂飛散を伴う流れ解析のための粒子法の開発, 東京大学修士論文, 160p., 1994.