Level Set法による自由表面流れの安定化有限要素解析

中央大学　学生員　○羽田康浩
日本工営　正会員　桜庭雅明
中央大学　正会員　樫山和男

1. はじめに

自由表面流れの数値解析は, 固定メッシュを用いて自由表面を捕捉する方法(界面捕捉法)と移動メッシュを用いて自由表面を追跡する方法(界面追跡法)に分類できる. 砕波等を含む複雑な自由表面問題の解析には, 界面捕捉法が有効であるとされてきたが, この方法は任意形状への適合性と計算精度に問題があった.

本報告では, 上記の問題点を克服するために, 任意形状への適合性に対しては非構造要素であるP1/P1要素を用い, 計算精度の向上に対しては自由表面の計算にLevel Set法[1)]を適用した. 数値解析例として, 2次元の液滴落下問題を取り上げ, 本手法の妥当性について検討するとともに, 表面張力の効果および体積保存に関する検討を行った.

2. 数値解析手法

(1) 流れ場の計算

非圧縮性粘性流体の基礎方程式はNavier-Stokesの運動方程式(1)と連続式(2)に支配される.

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\nabla u - f\right) - \nabla\cdot\sigma = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{1}$$

$$\nabla\cdot u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2}$$

uは流速, ρは密度, fは物体力を表している, ここで, 応力テンソルであるσは以下の式で表される.

$$\sigma = -pI + 2\mu\varepsilon(u) \tag{3}$$

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^T\right) \tag{4}$$

pは圧力, μは粘性係数である. 式(1)と式(2)の数値解析手法として, 安定化有限要素法(SUPG/PSPG法)[2)]を用いた. 時間方向の離散化にはCrank-Nicolson法を適用し, 圧力及び連続式は陰的に取り扱った.

(2) 自由表面の計算

本手法ではLevel Set法を用いて自由表面を捕捉している. 自由表面から等距離になるような距離関数（Level Set関数）を与えて次式の移流方程式(5)を用いて流れ場の値に従い界面を移動させる.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\cdot(\nabla F) = 0 \tag{5}$$

ここにFは距離関数として各点に符号付きで定義され, $F = 0$の等値面を界面とする. 式(5)の数値解析手法として, 安定化有限要素法(SUPG法)を用いた. なお, 距離関数は次式に示すHeaviside関数を用いて, 界面周辺をスムージング処理を行う.

$$H_\alpha = 0.5\left\{\max\left(-1.0, \min\left(1.0, \frac{F}{\alpha} + \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi F}{\alpha}\right)\right)\right\} \tag{6}$$

ここにαは計算格子幅の数倍となる任意の値である. Heaviside関数を用いて, 液体及び気体の密度と粘性係数は次式のようになる.

$$\rho = 0.5\cdot(\rho_{Liq} + \rho_{Gas}) + (\rho_{Liq} - \rho_{Gas})\cdot H_\alpha \tag{7}$$

$$\mu = 0.5\cdot(\mu_{Liq} + \mu_{Gas}) + (\mu_{Liq} - \mu_{Gas})\cdot H_\alpha \tag{8}$$

ここに, 添字Liq, Gasは, それぞれ液体・気体の諸量を表す.

(3) 再初期化の計算

Level Set法は時間が進むにつれ液相が大きく移動するため, 距離関数の性質が失われ, 計算が不安定になる. この距離関数の性質を回復するために以下に示す距離関数方程式を施し, 再初期化を行う[1)].

$$\frac{\partial F}{\partial t} = S(F)\cdot(1 - |\nabla F|) \tag{9}$$

$$S(F) = \frac{F}{\sqrt{F^2 + \varepsilon^2}} = \mathrm{sgn}(F) \tag{10}$$

ここにtは再初期化計算を行うための時刻である. 本研究では, 再初期化の方程式を以下に示す移流方程式に変形して計算を行うものとする.

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + w_S\cdot(\nabla F) = S(F) \tag{11}$$

$$w_S = S(F)\cdot\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \tag{12}$$

ここに, $S(F)$は符号関数を表し, 界面上で$S(F) = 0$となる. なお, 式(11)の計算方法にはSUPG法を用いた.

(4) 体積補正の計算

再初期化操作はLevel Set関数の性質を均一に保つことができるが, これにより液体の体積が減少する可能性が高くなる. これを回避するために体積を補正する方法を導入する[3)]. 体積補正の計算は体積保存率に重みを乗ずるものとして以下のようになる.

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + w_h\cdot(\nabla F) = S(F) \tag{13}$$

$$w_h = \delta_\alpha\cdot\left(1 - \frac{V}{V_{init}}\right)\cdot\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \tag{14}$$

ここに, V, V_{init}は各時刻における液体の体積及び初期体積, δ_αは近似デルタ関数であり, dH_α/dFである. なお, 各時刻における体積はHeaviside関数を用いて以下のように表すことができる.

$$V = \int_\Omega (0.5 - H_\alpha)\,d\Omega \tag{15}$$

Key Word: Level Set法, 体積補正, 表面張力
〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27
TEL 03-3817-1815,FAX 03-3817-1803

体積補正の方程式(12)についての数値計算法としては，SUPG法を用いた．

(5) 表面張力モデル

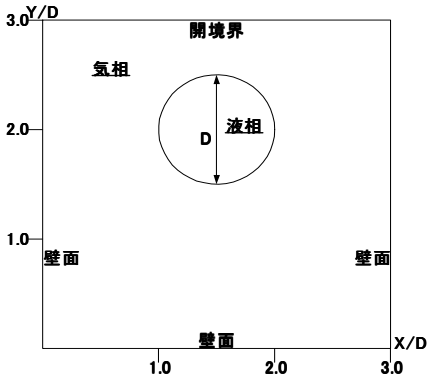
本手法では液相の受ける表面張力を考慮するために表面張力モデルを導入した．表面張力モデルとしてCSF法[4]を適用して，次式を用いて物体力として算定した．

$$f_{sv} = \delta \kappa \nabla \phi \qquad (15)$$

ここにδは表面張力係数である．なお，式(15)は有限要素法により求めるものとした．

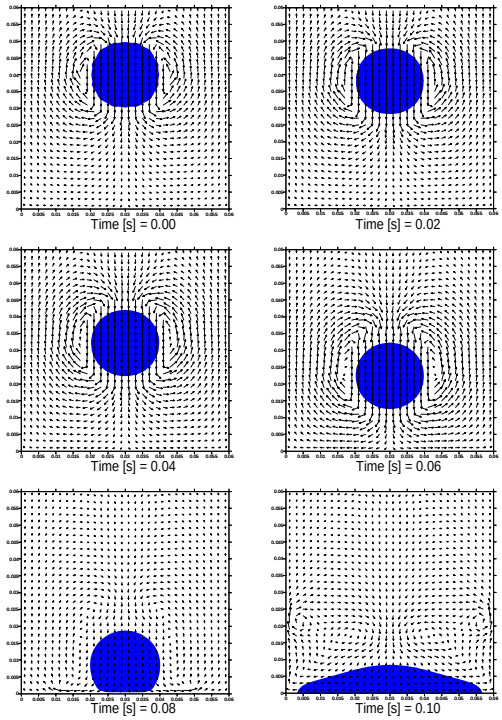
3. 数値解析例

数値解析として単一液滴運動[5]を解析した．**図**{1に示しているように計算初期に静止している一つの液滴を空中に配置し，その液滴が落下し，壁面に衝突すると共に，気液境界面が大変形するような過程に関する数値シミュレーションを実施した．計算条件としては，計算領域は6:0 Ç 6:0cmとなる2次元領域とし，格子数は60 Ç 60としている． また，液滴径Dは2:0cmとし，液体として水（密度998.0kg=m^3，粘性係数1.01 × 10^{Å3}N s=m^2），気体として空気（密度1.205kg=m^3，粘性係数1.81 × 10^{Å5}N s=m^2），表面張力係数(72:75 Ç 10^{Å3}N=m)を用いた．境界は上壁面を開放とし，それ以外すべてを固体壁としfree-slip条件を用いた．

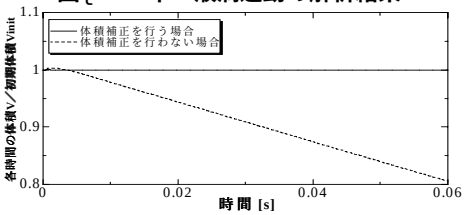


図{1 液滴運動の解析モデル

単一液滴の落下・壁面衝突過程に関する解析結果を**図**{2に示す．図中には，計算開始後t = 0:00 ò 0:10sにおける流速ベクトルと気液境界面を示している．**図**{2を見ると，時間と共に下降速度が増加し，液滴が落下している様子がうかがえる．また，表面張力を導入することにより，液滴形状が変形することなくほぼ初期形状の円形を保っていることが見られる．これらの一連の計算結果は，既存の計算結果[5]と定性的に一致しており，本計算法の有効性を示しているものと考えられる．**図**{3は同一の問題に対し，体積補正を行う場合と行わない場合の比較である．この図より，体積補正を行わない場合は液体が減少するのに対し，補正を行うと殆ど体積が減少しないことが確認される．



図{2 単一液滴運動の解析結果



図{3 体積の比較

4. おわりに

本論文では，Level Set法により単一液滴運動の安定化有限要素解析を行い，以下の結論を得た．

- è 表面張力を導入することにより，液滴形状を保つことができた．
- è 体積補正を行うことにより，液相の体積が一定になることが確認できた．

今後の課題としては，流入出問題などの各種問題への適用を図る予定である．

参考文献

1) M. Sussman, P. Smereca and S. Osher: A Level Set Approach for Computing Solutions for Incompressible Two-Phase Flow, :J.Comput. Phys, :144, pp.146-159. 1994
2) 日本数値流体力学会有限要素法研究委員会編，有限要素法による流れのシミュレーション:シュプリンガー・フェアラーク東京:300p., 1998
3) Y. C. Chang, T. Y. Hou, B. Merriman, and S. Osher, :'Eulerian Capturing Methods Based on a Level Set Formulation for Incompressible Fluid Interfaces, :J.Comput. Phys :124 :pp449-464 :1996.
4) J.U.Brackbill, D.B.Kothe and C.Zemach, :'A Continuum Method for Modeling Surface Tension, :J.Comput. Phys :100 :pp335-354 :1992
5) 二瓶泰雄，灘岡和男，GALモデルに基づく移動境界流れ解析法の構築とその応用： 土木学会論文集No.642 :pp19-30 :2002. 2