Eulerian Hydrocodeによる固体解析

広島大学 正員 岡澤重信 †
米国カリフォルニア大学サンディエゴ校 David. J. Benson

1. まえがき

非線形有限要素法を実務に適用するためには，解析のロバスト性や実現象との整合性など多くの問題が残されている．本研究では，固体の非線形有限要素解析において，上記の問題点を解決できると期待されるEulerian表示でのHydrocode (以下Eulerian Hydrocode) について概説する．

Hydrocodeとは，固体を流体のように扱ってその力学現象を解くための解析コードの総称であり，Hydrodynamic computer codeを短縮した名称である[1)2)]．通常の固体の有限要素法においては，運動量保存則から導出される仮想仕事の原理のみを用いるのに対して，Hydrocodeでは，質量·運動量·エネルギーの3つの保存則を考慮する．またHydrocodeにおいては応力波の刻々の変化を忠実に把握しなくてはならないために，一般的に動的陽解法を用いて解が求められる．

Eulerian表示での有限要素法においてはメッシュが空間に固定され，そのメッシュを越えて材料が移動する．その結果，特別な方法なしに新たな自由境界面を生成でき任意の大変形問題も扱えるため，固体力学において理論を構成される際に通常用いられるLagrangian表示の有限要素解析では困難な解析が可能となる．

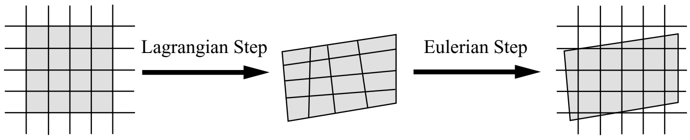
2. Eulerian 定式化

通常の構造解析コードにおけるLagrangian表示での保存則の記述には物質時間導関数が用いられるのに対して，Eulerian表示での保存則の記述においては空間時間導関数が用いられる．物質時間導関数と空間時間導関数の関係は以下のようになる．

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\phi) \tag{1}$$

ここで，ϕは任意量であり，$\boldsymbol{v}$は物質点の速度である．そして，$D\phi/Dt$と$\partial\phi/\partial t$は，それぞれϕの物質時間導関数と空間時間導関数であり，右辺第2項は一般的に移流項と呼ばれている．

Eulerian表示での質量·運動量·エネルギー保存則



図–1 Eulerian方程式を解くための操作分割法

はそれぞれ以下のようになる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho e \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} \tag{4}$$

ここで，ρは密度, $\boldsymbol{\sigma}$はCauchy応力テンソル, $\boldsymbol{b}$は物体力ベクトル，eは単位質量当たりの内部エネルギー，$\boldsymbol{D}$は速度ひずみテンソルである．

(1) 操作分割法

図-1は，Eulerian方程式を解く際に有効な手段である操作分割法の概念を示したものである．最初に，時間を進めるLagrangianステップにおいて，メッシュを変形させて物質を追跡する．次に，時間を固定したEulerianステップにおいて，歪んだメッシュを空間状で固定されたEulerianメッシュに引き戻す操作を行う[3)]．

Eulerian表示での支配方程式(2),(3),(4)は以下のような共通の形を有している．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{S} \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{\Phi}$は流動関数，$\boldsymbol{S}$は源流項である．また左辺第2項は移流項である．操作分割法では，式(5)を2つの方程式に分割する．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \boldsymbol{S} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Phi} = 0 \tag{7}$$

Key Words: *Eulerian, hydrocode, finite element method, solid mechanics*
† (E-mail) okazawa@naoe.hiroshima-u.ac.jp

式 (6) は，源流項を含んだ Lagrangian ステップにおける方程式であり，式 (7) は移流項を含んだ Eulerian ステップにおける方程式である．式 (6) と通常の Lagrangian 表示の支配方程式との違いは，時間導関数の種類である．ここで空間時間導関数を物質時間導関数に変換すれば，式 (6) は通常の Lagrangian 表示の支配方程式と同一となる．また式 (7) を解くためには，Lagrangian ステップによって歪んだメッシュを元の固定された Eulerian メッシュに戻す操作が必要となり，同時に隣接する要素間の物質の移動体積を計算しなくてはならない．さらに，質量，運動量，エネルギー，応力などの Lagrangian ステップにおける解を，移流アルゴリズムにおいて固定されたメッシュ上に投影する必要がある．

(2) Lagrangian ステップ

Eulerian 表示の有限要素法においては，参照する形状は現時刻における形状である．よって，updated Lagrangian 法を，操作分割法における Lagrangian ステップの手法としてそのまま用いることが可能である．離散化された Lagrangian 方程式は以下のようになる．

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{F}^{int} = \boldsymbol{F}^{ext} \tag{8}$$

ここで，$\boldsymbol{a}$ は加速度ベクトルであり，$\boldsymbol{M}$ は対角化された集中質量マトリクスである．また $\boldsymbol{F}^{int}$ と $\boldsymbol{F}^{ext}$ は，それぞれ内力及び外力ベクトルである．Eulerian 表示の有限要素法においては，１つの要素に複数の種類の材料が混入することが可能であり，そのような要素は混合要素と呼ばれる．また何も材料が混入しない要素は空隙要素として扱われる．Lagrangian ステップにおいては，要素内のひずみ速度と応力を求めなくてはならないが，同一要素内のすべての材料のひずみ速度は等しいと仮定し，その要素内で平均化した応力を要素の応力として取り扱うことにする[4]．

(3) Eulerian ステップ

操作分割法における Eulerian ステップにおいては，１次元の移流計算法を多次元の問題へ適用する．式 (7) の１次元の離散形は次のようになる．

$$\phi^{+}_{j+1/2} = \frac{\phi^{-}_{j+1/2}V^{-}_{j+1/2} + \phi^{-}_{j} f_j - \phi^{-}_{j+1} f_{j+1}}{V^{-}_{j+1/2} + f_j - f_{j+1}} \tag{9}$$

ここで，下付き文字の整数は節点，節点の $\pm 1/2$ は要素を示す．また上付き文字の $-$ と $+$ は，それぞれ移流前後の値を意味している．節点 i における移流体積は f_i，要素体積は V である．移流体積内の諸量 ϕ^{-}_{j}，ϕ^{-}_{j+1} を評価するために，monotonic upwind schemes for conservation laws (MUSCL) [5]を用いる．

混合要素のおいては，要素内の材料の境界面の評価を正確に評価しなくてはならない．本研究では，要素内の材料の含有率をパラメーターとした volume of fluid nethod(VOF 法)[6]を高精度にした方法[7]を用いる．

3. 例題

紙面の都合上 (電子ファイルのサイズの制約上)，ここでの例題計算結果は割愛する．講演会当日に，いくつかの計算結果を発表し，Eulerian Hydrocode によって，より現実的なシミュレーションが可能であることを示す..

4. 結論

Eulerian Hydorcode による固体の非線形有限要素解析を行うことによって，これまでの一般的な構造解析コードでは解けなかった力学現象を解くことが可能となる．また非線形解法として動的陽解法が用いられ，さらにメッシュの歪みが生じない Eulerian Hydrocode は，収束性や有限要素の健全性を理由に解析が停止しない非常にロバスト性の高い計算手法でもある．

参考文献

1) Johnson, W.E.: History and application of hydrocodes in hypervelocity impact, *Int. J. Impact Engng.*, 5, pp.423-439, 1987.
2) Anderson, C.E. Jr.: An overview of the theory of hydrocodes, *Int. J. Impact Engng.*, 5, pp.33-59, 1987.
3) Benson, D.J.: Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 99, pp.235-394, 1992.
4) Benson, D.J.: A mixture theory for contact in multi-material Eulerian formulations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 140, pp.59-86, 1997.
5) Van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme IV, *J. Comput. Phys.*, 23, pp.276-299, 1977.
6) Hirt, C.W., Nichols, B.D.: Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *J. Comput. Phys.*, 39, pp.201-225, 1981.
7) Youngs, D.L.: Time dependent multi-material flow with large fluid distortion, *Morton, K. W., Baines, M. J. (Eds.), Numerical methods for fluid dynamics*, pp.273-285, 1982.