

水平方向または時間方向に積分した積分型長波方程式

独立行政法人港湾空港技術研究所 正会員 柿沼太郎

1. 序 論: 変分法は、物体の運動を支配する方程式系を導くためのみならず、非線形方程式を解くためにも有力な方法である。すなわち、変関数がある関数形で仮定しておき、数値計算において、所与の方程式系を満足するような関数形を変分法によって確定する。しかし、計算上の制約から、変関数を表わす関数の自由度が大きくとれない場合、解の精度が悪くなる可能性がある。他方、近年、計算機の能力が高まり、各時刻において連続体が占める領域を細密に要素分割し、各要素や格子点に物理量を離散化して方程式を解く方法が発達してきた。Euler 的な方法では、差分法、有限要素法や境界要素法といった計算手法が駆使され、様々な数値解法上の工夫と相俟って、乱流や混相流といった複雑な現象を含む流体運動の解明が進んでいる。ところで、計算機の能力が向上した現在、変分法で用いる関数の自由度を非常に大きくとることができる。従って、連続体に発生する物理量を空間的にまたは時間的に離散化することなく、連続関数によって精度よく近似することができるであろう。このような新しい発想のもとに、本研究では、長波方程式において発生する連続的な物理量を連続関数によって表現することを考える。ここでは、連成振動の概念(灘岡・中川, 1993)を鉛直方向のみならず水平方向並びに時間方向にも適用し、物理量を連続関数の重み付き和として表現する。そして、長波方程式を水平方向、あるいは、時間方向に積分する。前者において、空間に関する積分は、Euler 的な見方と Lagrange 的な見方の双方を包含することになり、空間をメッシュで切ったり、各粒子を追跡するといった目的のための要素分割が必要ない。また、時間積分された後者では、時間ステップが存在しない。実際の数値計算では、有限個の関数を用いて物理量を表現するから、求まる解は、あくまで真の解の近似解である。そして、この場合、物理量を表わす和の要素である各連続関数の変化、すなわち、空間的・時間的に連続的に変化する各成分の挙動へと、方程式の離散化が行なわれる。計算精度は、これら用いる関数の関数形と項数に依存する。

2. 汎関数の定義: 非粘性・非圧縮性流体の非回転運動を対象とし、速度ポテンシャルを $\mathbf{u} = \nabla\phi$, $w = \partial\phi/\partial z$ で定義する。ここで、 $\mathbf{u}$ 及び w は、それぞれ、各点における流速の水平方向成分ベクトル及び鉛直方向成分である。また、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は、水平方向の微分演算子である。

水面及び底面の位置をそれぞれ $z = \zeta(\mathbf{x}, t)$ 及び $z = b(\mathbf{x}, t) \leq \zeta$ とし、両者がともに $\mathbf{x}$ の 1 価関数であるとする。質量力が重力のみであると仮定し、表面張力の効果を重力の効果に比べて無視する。また、自由水面に働く大気圧を 0 とする。いま、対象領域の $x-y$ 平面への正射影である平面 A 及び底面位置 b が既知であるとする。求める未知変数は、速度ポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, z, t)$ 及び水面変動 $\zeta(\mathbf{x}, t)$ となる。このとき、密度が一様な流体の運動を表わす変分問題の作用 $\mathcal{F}[\phi, \zeta]$ を次式の汎関数とする (Luke, 1967)。

$$\mathcal{F}[\phi, \zeta] = \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \int_b^{\zeta} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 + gz \right\} dz dA dt \quad (1)$$

ここで、 $(\nabla\phi)^2 \equiv |\nabla\phi|^2$ とする。 g は、重力加速度である。このように汎関数を定義しておけば、 $\mathcal{F}$ の第 1 変分が 0 であるとき ($\delta\mathcal{F} = 0$)、任意の点における連続方程式、任意の点における Bernoulli の式、水面における力学的境界条件及び水面と底面における運動学的境界条件が満たされる。

3. 長波方程式: 右図の領域 $x_0(t) \leq x \leq x_1(t)$, $b \leq z \leq \zeta(\mathbf{x}, t)$ を対象とする。ここでは、簡単のために、 $b = \text{const.}$ とする。平面 2 次元型の方程式系を得るために鉛直分布関数を設定し、速度ポテンシャル ϕ を鉛直分布関数 $Z_\alpha(z)$ の重み付き和として次式のように表わす。

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \{Z_\alpha(z) \cdot f_\alpha(\mathbf{x}, t)\} \equiv Z_\alpha(z) \cdot f_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

いま、極浅水域を対象とし、鉛直分布関数を 1 項のみ用いることにして ($N = 1$)、 $Z_\alpha \cdot f_\alpha = Z_0 \cdot f_0 = 1 \cdot f_0 = f(\mathbf{x}, t)$ とする。このとき、磯部 (1994) の方法にならい、式 (2) を式 (1) に代入して鉛直積分を解析的に行なってから、変分原理の Euler-Lagrange の方程式を求めると、次式のような非線形長波方程式が得られる。

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \nabla \{(\zeta - b)\nabla f\} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla f)^2 + g\zeta = 0 \quad (3)$$

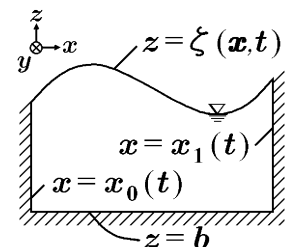


図: 流体の対象領域

キーワード → 積分型方程式, 変分法, 要素分割, 数値計算, 非線形長波方程式

連絡先 → 〒239-0826 横須賀市長瀬 3-1-1, TEL: 0468(44)5052, FAX: 0468(44)1274

鉛直分布関数として $Z_0 = 1$ のみを用いるこの場合の鉛直積分は、鉛直方向の平均化の意味を持つ。

4. 空間に関して積分した積分型長波方程式: 次に、鉛直積分と同様にして、水平方向にも積分した長波方程式を求める。簡単のために、 $x-z$ 平面内で考える。水平分布関数を設定し、速度ポテンシャルの重み関数 $f(x, t)$ 及び水面変動 $\zeta(x, t)$ をそれぞれ水平分布関数 $X_\alpha^f(x)$ 及び $X_\alpha^\zeta(x)$ の重み付き和として次式のように表わす。

$$f(x, t) = \sum_{\alpha=0}^{N^f-1} \{X_\alpha^f(x) \cdot \xi_\alpha^f(t)\} \equiv X_\alpha^f(x) \cdot \xi_\alpha^f(t), \quad \zeta(x, t) = \sum_{\alpha=0}^{N^\zeta-1} \{X_\alpha^\zeta(x) \cdot \xi_\alpha^\zeta(t)\} \equiv X_\alpha^\zeta(x) \cdot \xi_\alpha^\zeta(t) \quad (4)$$

これらを $\mathcal{F}[\phi, \zeta] = \mathcal{F}[f, \zeta] = \mathcal{F}[\xi^f, \xi^\zeta] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}[\xi^f, \xi^\zeta] dt$ に代入して、水平積分を行なう。Euler-Lagrange の方程式が式 (5) であり、これより、水平方向にも積分した積分型長波方程式が式 (6) のように得られる。

$$[\mathcal{L}]_{\xi_\alpha^f} \equiv \mathcal{L}_{\xi_\alpha^f} - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_{\frac{\partial \xi_\alpha^f}{\partial t}} = 0, \quad [\mathcal{L}]_{\xi_\alpha^\zeta} \equiv \mathcal{L}_{\xi_\alpha^\zeta} = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (B_{\alpha\beta} \xi_\beta^\zeta - b A_\alpha) - E_{\alpha\beta\gamma} \xi_\beta^f \xi_\gamma^\zeta + b D_{\alpha\beta} \xi_\beta^f &= 0, \quad B_{\beta\alpha} \frac{\partial \xi_\beta^f}{\partial t} + \frac{1}{2} E_{\beta\gamma\alpha} \xi_\beta^f \xi_\gamma^f + g C_{\alpha\beta} \xi_\beta^\zeta = 0; \quad A_\alpha = \int_{x_0}^{x_1} X_\alpha^f dx, \\ B_{\alpha\beta} &= \int_{x_0}^{x_1} X_\alpha^f X_\beta^\zeta dx, \quad C_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1} X_\alpha^\zeta X_\beta^\zeta dx, \quad D_{\alpha\beta} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial X_\alpha^f}{\partial x} \frac{\partial X_\beta^f}{\partial x} dx, \quad E_{\alpha\beta\gamma} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial X_\alpha^f}{\partial x} \frac{\partial X_\beta^f}{\partial x} X_\gamma^\zeta dx \end{aligned} \quad (6)$$

本方程式系の数値解法では、空間を有限要素に分割して各要素や格子点上に物理量を離散化する必要がない。なお、側方境界における反射率を設定して $x = x_0(t)$ を水平方向に動かせば、造波板として波を生成する。そして、外力を含む境界条件を $x = x_1$ において与えて、 x_1 を未知関数として扱えば、 $x = x_1(t)$ が波動エネルギーの吸収・変換板となる。また、 $z = b(x)$ を斜面として、 $x = x_1$ で $\zeta = b$ とし、 x_1 を未知関数として扱えば、汀線移動が $x = x_1(t)$ として求められる。

5. 時間に関して積分した積分型長波方程式: 他方、時間方向に積分した長波方程式を求める。簡単のために、 x_0 及び x_1 をともに一定値とする。 $f(x, t)$ 及び $\zeta(x, t)$ をそれぞれ時間分布関数 $T_\alpha^f(t)$ 及び $T_\alpha^\zeta(t)$ の重み付き和として次式のように表わす。

$$f(x, t) = \sum_{\alpha=0}^{N^f-1} \{T_\alpha^f(t) \cdot \tau_\alpha^f(x)\} \equiv T_\alpha^f(t) \cdot \tau_\alpha^f(x), \quad \zeta(x, t) = \sum_{\alpha=0}^{N^\zeta-1} \{T_\alpha^\zeta(t) \cdot \tau_\alpha^\zeta(x)\} \equiv T_\alpha^\zeta(t) \cdot \tau_\alpha^\zeta(x) \quad (7)$$

同様の Euler-Lagrange の方程式より、次式のような時間に関して積分した積分型長波方程式が得られる。

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} \tau_\beta^\zeta - b O_\alpha - \nabla (S_{\alpha\beta\gamma} \nabla \tau_\beta^f \cdot \tau_\gamma^\zeta - b Q_{\alpha\beta} \nabla \tau_\beta^f) &= 0, \quad P_{\beta\alpha} \tau_\beta^f + \frac{1}{2} S_{\beta\gamma\alpha} \nabla \tau_\beta^f \cdot \nabla \tau_\gamma^f + g R_{\alpha\beta} \tau_\beta^\zeta = 0; \\ O_\alpha &= [T_\alpha^f]_{t_0}^{t_1}, \quad P_{\alpha\beta} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T_\alpha^f}{\partial t} T_\beta^\zeta dt, \quad Q_{\alpha\beta} = \int_{t_0}^{t_1} T_\alpha^f T_\beta^f dt, \quad R_{\alpha\beta} = \int_{t_0}^{t_1} T_\alpha^\zeta T_\beta^\zeta dt, \quad S_{\alpha\beta\gamma} = \int_{t_0}^{t_1} T_\alpha^f T_\beta^f T_\gamma^\zeta dt \end{aligned} \quad (8)$$

モデル内で連続関数を扱う場合、実際の物理現象のように時間が過去から未来に進んでいる必要がなく、時間の正・負二つの向きは、相対的なものである。式 (8) では、時間の向きが時間積分の向きとして現れる。

6. 空間及び時間に関して積分した積分型長波方程式: x_0, x_1 を一定とする。空間と時間の両者に関して積分した長波方程式が同様にして求められる。そのためには、水平分布関数と時間分布関数を設定し、重み関数 $\xi_\alpha^f(t)$ 及び $\xi_\alpha^\zeta(t)$ をそれぞれ時間分布関数 $\Lambda_\beta^{f,\alpha}(t)$ 及び $\Lambda_\beta^{\zeta,\alpha}(t)$ の重み付き和として次式のように表わせばよい。

$$\xi_\alpha^f(t) = \sum_{\beta=0}^{N^{f,\alpha}-1} \{\Lambda_\beta^{f,\alpha}(t) \cdot \lambda_\beta^{f,\alpha}\} \equiv \Lambda_\beta^{f,\alpha}(t) \cdot \lambda_\beta^{f,\alpha}, \quad \xi_\alpha^\zeta(t) = \sum_{\beta=0}^{N^{\zeta,\alpha}-1} \{\Lambda_\beta^{\zeta,\alpha}(t) \cdot \lambda_\beta^{\zeta,\alpha}\} \equiv \Lambda_\beta^{\zeta,\alpha}(t) \cdot \lambda_\beta^{\zeta,\alpha} \quad (9)$$

7. 結 論: 変分法を用いて、水平方向または時間方向に積分した積分型長波方程式を導いた。連続体を対象とし、未知変数は、連続関数で仮定した各成分の変動を加え合わせた和として表わす。従って、数値解析の際に、空間の有限要素分割または時間のステップ刻みを必要としない。3次元空間と時間の両方を考慮して (3+1) 次元に広がる場の方程式が、鉛直積分によって (2+1) 次元型方程式になり、水平積分によって (0+1) 次元型になる。更に、これを時間積分することによって、(0+0) 次元型方程式が得られる。本研究の考え方が計算力学の進歩に逆行するものでないことを確かめるためには、隅角部を有する領域や、衝撃外力が働く場合等において発生する波・流れ場に対して数値計算を行ない、解の精度について検証する必要がある。

本研究を遂行するにあたり貴重な御助言を頂いた東京大学大学院工学系研究科渡辺 晃教授に感謝します。

参考文献: 磯部雅彦 (1994), 土木学会論文集, No. 491/II-27, pp. 1-14., 灘岡和夫・中川康之 (1993), 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 6-10., Luke, J. C. (1967), J. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 395-397.