

マニフォールド法と有限要素法との比較

九州大学 工学研究院 正会員 ○陳 光斉・善 功企 笠間清伸

1. はじめに

マニフォールド法 (MM, Manifold Method)¹⁾ は材料の変形及び運動を解析するために最近開発された数値解析方法である。MM は、有限要素法²⁾ (FEM, Finite Element Method) の様に複雑な応力状態の材質に対して、メッシュにより要素分割し、精度高い変形解析ができる。また、不連続変形法のように不連続材料の分離破壊や剛体運動などをシミュレーションすることもできる。しかし、MM の応用はまだまだに十分普及しているとは言えない。その原因の一つは、FEM と比べて MM のメリットがはっきり明らかになっていないということが挙げられる。

本論文では、先ず、定式化理論において、FEM と比較しながら MM を紹介し、MM 理論のメリットを明らかにする。それから、二つの応用例を通じて、大変形問題における MM の不連続体の変形解析の有効性および高次化 MM の利便さについて検討する。

2. 定式化における比較

数値解析では、ある領域 F で定義される複雑な関数 $f(x, y)$ を扱うために、全領域を有限の小領域 ($C_i, i = 1, 2, \dots, n$) に分割し、個々の小領域 C_i 内で $f(x, y)$ に近似した単純関数 $u_i(x, y)$ を用いるのが一般的である。

有限要素法では、これらの小領域を要素と呼び、全ての要素は重ね合わせなく全領域を覆う。そして、ある要素から隣接する要素への変位の連続性を保証するために、要素の単純関数は節点と呼ばれる境界点で拘束される。その結果として、要素内で用いられる単純関数の次数は要素の節点数に制限される。

MM では、このような小領域 C_i をカパーと呼び、対応する単純関数 $u_i(x, y)$ をカパー関数と呼ぶ。FEM と違って、MM のカパーはお互いに重ね合わせることができる。複数の重なったカパーの共通領域は MM の要素として定義される。幾つの重ね合わせたカパーにより、共通領域が形成されている。例えば、 m 個の重複するカパー ($C_i, i = 1, 2, \dots, m$) が共通領域 E (要素) を形成すると仮定すると、要素上の近似関数 $u(x, y)$ は m 個のカパー関数の重み付け平均で得られる。

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^m w_i(x, y) u_i(x, y) \quad (x, y) \in E \quad (1)$$

ただし、 $w_i(x, y)$ は重み関数である。

$$\begin{cases} 0 \leq w_i(x, y) \leq 1 & (x, y) \in C_i \\ \sum_{i=1}^m w_i(x, y) \equiv 1 & (x, y) \in E \end{cases} \quad (2)$$

マニフォールド法の理論が変形解析に応用されるには、カパーの形状、カパー関数及び重み関数などの選択がキーポイントになっている。

2.1 三角形メッシュにおける要素

理論的には、MM には任意形状のカパーを用いることができるが、FEM と比較し易いため、本研究では Fig.1 で示された三角形メッシュによる六角形のカパーを用いる MM について検討する。

図中の一つの三角形 e は FEM と MM 両方とも要素であるが、それぞれの要素の定義が違う。FEM では要素は三角形の3頂点をノードとして定義される。MM では要素はその三角形の3頂点を中心とする3つの六角形カパー C_i, C_j, C_k の共通領域と定義される。この定義の違いにより要素上の関数の高次化には大きな違いが生じる。例えば、変形解析を行うは、FEM ではノード上で定数の未知係数として変位を表す。一方、MM ではカパー領域内の位置の関数として取り扱うことができる。

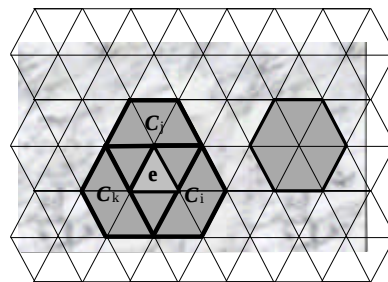


Fig. 1 Three hexagonal covers have a triangle common area

2.2 重み関数と形状関数

六角形の重み関数是一个の三角形に線形関数を用い、カパーの中心点で1、境界点で0になるように拘束すると、次の式になる。

キーワード：マニフォールド法、有限要素法、不連続変形、破壊、カパー、メッシュ、変位関数

福岡市東区箱崎 6-10-1 Tel. & Fax.: 092-642-4406 E-mail: chen@civil.kyushu-u.ac.jp

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_j \\ w_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} x_j y_k - x_k y_j & y_j - y_k & x_k - x_j \\ x_k y_i - x_i y_k & y_k - y_i & x_i - x_k \\ x_i y_j - x_j y_i & y_i - y_j & x_j - x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

ただし、 w_i, w_j, w_k は要素 e に対してカパー C_i, C_j, C_k の重み関数である。 $((x_l, y_l) \mid l = i, j, k)$ は三角形の頂点(各カパーの中心点)座標である。MM の重み関数(3)は FEM の形状関数と一致している。ただし、FEM ではガウス数値積分を利用するため、形状関数は変数変換で(3)の形とは異なる。

2.3 要素上の変位関数

変形解析には、MM のカパー関数は各成分の変位関数が定義される。 $u_l(x, y), v_l(x, y)$ はカパー C_l ($l = i, j, k$) 上の変位関数とすると、式(1)によって、要素 e 上に変位関数は次のようになる。

$$\begin{cases} u(x, y) = w_i(x, y)u_i(x, y) + w_j(x, y)u_j(x, y) + w_k(x, y)u_k(x, y) \\ v(x, y) = w_i(x, y)v_i(x, y) + w_j(x, y)v_j(x, y) + w_k(x, y)v_k(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

ここで、注目すべきのは、重み関数は線形関数であるので、要素上の変位関数はカパー関数の中最高次数より、1次高いである。従って、カパー変位関数を定数とすると、要素の変位関数は線形関数になり、 n 次のカパー変位関数によって要素の変位関数は $n+1$ 次になる。即ち、要素上の変位関数の次数はカパー関数より決められ、メッシュに独立である。高次変位関数でも線形変位関数と同じメッシュを利用できる。

一方、FEM の場合、要素の変位関数の次数は要素の節点数に制限され、変位関数の次数を増やすために要素の節点数を増やさなければならぬ。

マニフォールド法の定式化は有限要素法と同様にポテンシャルエネルギー最小化の原理に基づいており、平衡方程式が得られ、カパー関数の未知数係数が求められる。オリジナルの MM は、定数のカパー変位関数を用い、剛性行列と外力ベクトルが Shi¹⁾によって得られている。それを参考し、Chen ら³⁾が線形のカパー変位関数に対して剛性行列と外力ベクトルを誘導した。

2.4 積分方法

FEM ではガウス数値積分を使うのは一般である。ガウス法には任意形状の三角形要素に対して、積分変数変換が必要である。その結果、点荷重や拘束点の位置などはノード点に一致しないと困難が生じる。

一方、MM では解析方法の Simplex 積分法を利用している。積分変数変換の必要はないし、点荷重や拘束点の位置が任意の位置で設置される。もう一つの特徴は、材料の幾何形状や不連続面などがいかなる場合でも均一なメッシュカパーを用いることができる点である。それは、材質の外部へはみだしたカパー部分に対して、重み関数をゼロにすれば積分は有効領域内だけで行うことになるからである。

2.5 不連続面の処理

MM では接触している不連続面には法線ばねと接線方向ばねを設置することにより二つのブロックを連結する。ただし、Coulomb の法則によって、その面上のばねを外し、二つブロックをすべりや分離させる。

以上のアプローチで材料の破壊をシミュレーションできる。MM は慣性力を考慮しているため、分離されたブロックの静的平衡が崩されても、慣性力によるブロックの運動を追跡できる。このような破壊後の大変形は、FEM で計算できない。

3 適用例による比較

破壊や大変形問題の解析において、FEM より MM の有効性を示すために、不連続面を有する岩石ブロック供試体を用いた二軸圧縮試験の解析に MM と FEM を適用した。

MM 解析結果では、全ての計測点での解析値は実験値と概ね一致しており、実験結果での供試体全体の變形モードが表現されている。FEM 解析結果では破壊する前に MM と同じ結果を得られたが破壊した後は計算不可になった。

二つ目の適用例は中点に集中荷重が作用するはりの曲げ変形問題である。同じメッシュで線形 MM と 2 次 MM を用いて解析を行った。中立軸上に 5 つの等間隔点(A~E)の垂直変位を出力して、理論式によって得られた対応点の変位と比較した。

解析結果では、曲げ変形が卓越する問題に対して、一次 MM による解析結果は、要素数が少ないため、理論解と比べて大きな誤差があるが、二次 MM による解析結果は全ての点において、理論解と概ね一致が見られている。従って、二次 MM を用いれば、少ない要素で高精度の解析することができることが判明している。

4 おわりに

本論文では、定式化理論による MM と FEM の比較研究を行い、MM の次の主なメリットを明らかにした。

1) カパーの概念の導入により要素上の変位関数は線形か高次かとは関係がなく同じメッシュを用いることができる。2) Simplex 積分法を採用することにより、解析領域の境界形状が複雑でも、多くの不連続面があったにも関わらず、一様で均一なメッシュを利用して解析できる。しかも、荷重点や拘束点はノード点に設定する必要がない。3) 慣性力の導入や不連続面の接触と分離のアプローチを取り込むことにより、大変形や破壊、そして、剛体運動などを含む問題を解析できる。また、二つの応用例を通じて以上述べた MM のメリットが実証された。

【参考文献】1) G. Shi(1996): "Manifold Method", DDA and Simulations, 52—204. 2) 鷲津久一郎等(1987): 有限要素法、岩波出版. 3) G. Chen et al. (1998): "Development of High-order MM", Int. J. Numer. Meth. Engng. 43, 685—712.