社会システムの安定に関する数学的安定性からの基礎的考察

京都大学大学院　学生員　○坂本　麻衣子
京都大学防災研究所　正会員　萩原　良巳

1．はじめに

社会システムを理解する上で、数学モデルによる分析を用いる研究は数多く存在する。モデル化に際しては、「微分方程式」「ゲーム理論」などが広く利用されている。ここで、数学モデルの安定性を基礎に議論を進める場合、数学的安定性によって社会的安定性をどこまで語れるものなのか、という疑問が湧いてくる。一般に数学的安定性とは言っても種々の安定性が存在する。社会システムを数学モデルにおける安定性によって論じようとするならば、どのような社会システムを想定しているのか、いかなる社会システムの安定を念頭においてモデル化を行うのか、また着目する安定性の示す数学的概念はどのようなものなのか、対象とする社会システムの安定と数学的安定状態の‘ずれ’が存在するとすればどのような点か、など認識しておくべき事柄は多い。

本研究では「微分方程式」「ゲーム理論」における安定性と、これらを共に用いてモデル化された「レプリケーター・ダイナミクス」、およびこの基礎となる「進化ゲームの理論[1]」における安定性を整理し、社会システムにおける安定性との関連について考察する。

2．微分方程式系における安定性

微分方程式系における安定性として最も基本的な概念はリヤプノフ安定性であり、しばしば簡単に「安定性」と呼ばれる。状態 x がリヤプノフ安定であるとは状態 x に対するどんな小さな摂動も、状態 x から離れていくような動きを生み出さないことを指す。

さらに頑健な安定性として漸近安定性が挙げられる。漸近安定性は、その状態に(局所的に)向かっていくことを要求する。つまり状態 x が漸近安定であるとは、それがリヤプノフ安定であり、かつ状態へのすべての十分小さな摂動が x に戻る動きを導くときのことをいう。これらの安定性は個々の状態あるいは状態の集合に適用される。

3．ゲーム理論における安定性

ゲーム理論における安定性としてはナッシュ均衡が一般的である。ナッシュ均衡とは、他のプレーヤーの戦略に対して最適であり、かつそれ自身に対しても最適である戦略によって構成される。すなわち、プレーヤー i の戦略 x_i が、プレーヤー i 以外のプレーヤーの戦略 y_i に対して得る利得を $u_i(x_i, y_{-i})$、プレーヤー i の最適反応 $\tilde{\beta}_i(y)$ を

$$\tilde{\beta}_i(y) = \{x_i : u_i(x_i, y_{-i}) \ge u_i(z_i, y_{-i}), \forall z_i\} \tag{1}$$

と表せば、ナッシュ均衡は

$$x \in \tilde{\beta}_i(x) \tag{2}$$

を満たす戦略 x と表すことができる。

また、ナッシュ均衡のうちで、それが x に対する唯一の最適反応である場合、すなわち、

$$\{x\} = \tilde{\beta}_i(x) \tag{3}$$

ならば、特に強ナッシュ均衡であるという。

4．進化ゲームの理論における安定性

進化ゲームの理論における安定状態は、ゲーム解として一般的であるナッシュ均衡、進化的安定、中立安定の3つに大別される。進化的に安定であるとは、当該戦略よりも同等またはより高い利得を得る戦略が存在しないことを要求する。すなわち、任意の $y \ne x$ に対して

$$u(y,x) \le u(x,x) \quad \forall y \tag{4}$$

$$u(y,x) = u(x,x) \to u(y,y) < u(x,y) \quad \forall y \tag{5}$$

が成り立つとき x は進化的安定戦略である。

中立安定であるとは、当該戦略よりも高い利得を得る戦略が存在しないことを要求する。すなわち、

$$u(y,x) \le u(x,x) \quad \forall y \tag{6}$$

$$u(y,x) = u(x,x) \to u(y,y) \le u(x,y) \quad \forall y \tag{7}$$

が成り立つとき x は中立安定戦略である。

レプリケーター・ダイナミクスは、利得行列が戦略に対する生物種の個体数の適応度を表すという仮定のもとに、種の個体数の時間変化を微分方程式系により定式化するモデルである。生物学の分野にお

キーワード：安定性概念，社会システム，ゲーム理論，進化ゲーム，微分方程式
〒611-0011　宇治市五ヶ庄　TEL0774-38-4017　FAX0774-38-4044

いて発展してきたが、利得行列の設定と解釈によってしばしば社会システムにおける現象のモデル化にも適用される。

5．安定性の関連

以上で説明した安定性の関連[1)]を次図にまとめる。

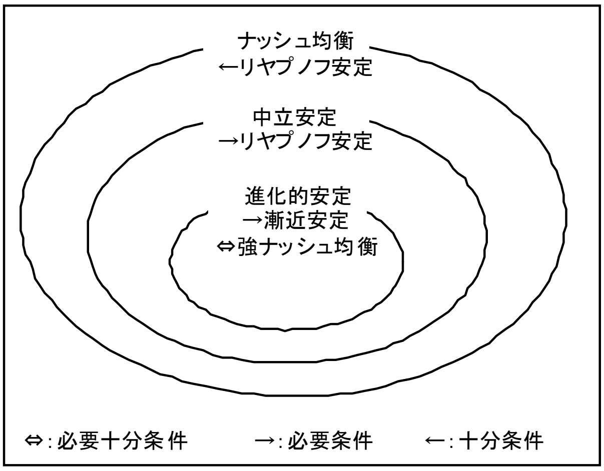

図１　安定性の関連

図１に示すように、ナッシュ均衡解は微分方程式系におけるリヤプノフ安定と関連がある。リヤプノフ安定ならば、それはナッシュ均衡解となる。ただしナッシュ均衡解であるからといってリヤプノフ安定であるとは限らない。つまりレプリケーター・ダイナミクスにおいてリヤプノフ安定はナッシュ均衡よりも厳しい基準であるといえる。しかし、解軌道上で x に小さな摂動が生じた場合、リヤプノフ安定では本来導かれるところから離れた状態へ運ばれてしまう可能性がある。

これに対して漸近安定性はいかなる摂動に対しても現状へひき戻されることを保証する。これは強ナッシュ均衡と同値であることが示されている。また、摂動に対して安定であるという安定性はゲーム解においては進化的安定戦略と符合する。すなわち、進化的安定ならば漸近安定である。また中立安定であればリヤプノフ安定である。ただし、これらの逆は一般には成り立たない。

6.社会システムの安定と数学的安定性に関する考察

以上の数学的安定性についての認識のもと、社会システムの安定について考える。

微分方程式系において示した２つの安定性の相違は、安定状態への収束過程で摂動が加わった場合に、本来導かれる状態に運ばれ得るか否かである。時間の経過による社会システムの初期条件や境界条件の変化が避けられない以上、このような変化を摂動と捉え、計画を立てる上で摂動に対して頑健な漸近安定性に着目することが望ましいものと考えられる。しかし、漸近安定性は非常に厳しい安定性であり、これを満たすのが困難な場合、リヤプノフ安定性を用いることとなる。このとき、摂動によって予測している安定状態からの乖離が起こり得ることを少なくとも認識しておく必要があるものと考える。また、漸近安定とリヤプノフ安定への収束を分離する条件に関する分析も計画を行う上で重要であると考えられる。このような点を認識ながらリヤプノフ安定性に着目して設計された計画は、柔軟性のある計画として捉えることもできる。

伝統的なゲーム理論と進化ゲームの理論の相違は時間軸を考慮しているか否かである。ゲーム理論は１回限りのゲームをプレーヤーがプレーする場合の均衡状態について示すものである。一方、進化ゲームの理論はゲームが繰り返され、プレーヤーが利得について学習することによって達しうる均衡状態について示すものである。ここで、社会システムのモデル化に進化ゲームの理論を用いる場合、進化的安定性は社会的に非効率な因習を許容する点に注意しなければならない。例えば囚人のジレンマにおいて、集団内で協力解を選択する集団構成員がどれほど多く存在しようとも、最適反応である非協力解を選択する集団を排除できない。つまり、進化ゲームの理論における安定性は非協力解であるナッシュ均衡解を精緻化するものであり、モデル化においてこの前提を認識しておくこと必要がある。

社会システムに対して計画を行い、さらにその計画が社会に受容され得るものであるためには、モデル上では利得行列で記述される人々の価値観が、摂動や学習により変化し得るということを認識し、これを前提として不確実性を有する社会システムの安定を目指すことが重要であるものと考える。

［参考文献］

1）Ｊ.W.ウェイブル・大和瀬達二監訳；進化ゲームの理論，文化書房博文社，1998.