

保存形式 6-point scheme を用いたダム破壊問題の数値解法

山口大学工学部 正会員 朝位 孝二

1. はじめに

Komatsu らが開発した 6-point scheme¹⁾は線形移流方程式を高精度で計算を行うことができるが、急勾配分布の前後では数値振動が発生する。朝位は 6-point scheme を保存形式表示（保存形式 6-point scheme）しフラックス制限関数を導入することで数値振動を抑制した²⁾。本研究では数値振動を抑制できる保存形式 6-point scheme のダム破壊問題への適用を試みた。

2. 保存形式 6-point scheme

一次元の移流方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (1) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u \phi}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

ここで流速 u は一定とする。式 (1) は特性曲線表示ができ、6-point scheme は特性曲線法に基づく計算スキームである。6-point scheme はこのままでは急勾配濃度分布近傍で数値振動が起きてしまう。数値振動を抑制するためにはフラックス制限関数を導入しスキームを TVD 化する必要がある。しかしながらフラックス制限関数を 6-point scheme に直接導入する事は困難である。そこで保存型で示された式 (2) に適応できるように 6-point scheme を修正したものが保存形式 6-point scheme である。それを以下に示す。

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \alpha(\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n) \quad (3)$$

α はクーラン数 ($= u\Delta t/\Delta x$) である。界面濃度の評価に次式を用いる。

$$\phi_{i+1/2}^n = C_1 \phi_{i-2}^n + C_2 \phi_{i-1}^n + C_3 \phi_i^n + C_4 \phi_{i+1}^n + C_5 \phi_{i+2}^n \quad (4)$$

$$\text{ここで, } C_1 = -\frac{13}{720}\alpha^2 - \frac{3877}{101280}\alpha + \frac{17117}{303840} \quad C_2 = \frac{43}{180}\alpha^2 + \frac{367}{25320}\alpha - \frac{19247}{75960} \quad C_3 = -\frac{53}{120}\alpha^2 + \frac{53}{80}\alpha + \frac{187}{240}$$

$$C_4 = \frac{43}{180}\alpha^2 - \frac{6171}{8440}\alpha + \frac{37393}{75960} \quad C_5 = -\frac{13}{720}\alpha^2 + \frac{3121}{33760}\alpha - \frac{22603}{303840}$$

式 (3), (4) を用いた解法が保存形式 6-point scheme である。式 (4) は 5 点の濃度値とクーラン数の関数である。流速が変化する場合局所的な界面流速で定義されるクーラン数を用いればよい。フラックス制限関数にユニバーサルリミッターを用いれば保存形式 6-point scheme は TVD 化される。

3. ダム破壊問題

一次元漸変流方程式は次式で表される。なお簡単のためここでは底面摩擦項は考慮しない。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad \text{但し} \quad Q = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

ここで h : 水深, q : 単位幅流量, t : 時間, x : 空間座標, g : 重力加速である。このシステム方程式を安定に解く手法は種々提案されているが最も一般的なものは Roe の FDS スキームである。本研究も FDS スキームに基づく解法を採用する。さて、FDS スキームの高次精度化に MUSCL 内挿法が用いられる。式 (4) が界面の値の高精度推定法であることに着目し MUSCL タイプの手法で FDS スキームの高次精度化を図る。具体的には次式を

キーワード 保存形式 6-point scheme, ダム破壊問題, FDS, MUSCL

連絡先 〒755-8611 山口県宇部市常盤台 2-16-1 山口大学工学部社会建設工学科 TEL 0836-85-9318

用いて計算を行う。

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{i+1/2}^n - E_{i-1/2}^n) \quad (7) \quad E_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \{ [E(Q_R)_{i+1/2}^n + E(Q_L)_{i+1/2}^n - |A| \{ (Q_R)_{i+1/2}^n - (Q_L)_{i+1/2}^n \}] \}$$

$$Q_R = f(Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1}, Q_{i+2}, Q_{i+3}, (u-c)\Delta t / \Delta x), \quad Q_L = f(Q_{i-2}, Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1}, Q_{i+2}, (u+c)\Delta t / \Delta x)$$

$|A|$ は流束ヤコビアン行列，関数 f は式（4）である。また c は波速である。 Q_R, Q_L はそれぞれ $i+1/2$ 界面の右側，左側の値である。常流の場合 $u+c$ の特性曲線は左から右へ， $u-c$ のそれは右から左に進むことを考慮して（図-1），使用する格子点とクーラン数を決めた。

モデル計算として図-2 に示すダム破壊問題を取り上げる。空間方向の計算格子間隔は 0.1m、時間方向の計算格子間隔は 0.01s である。瞬間的に中央部の仕切板を引上げ、その後の流れの様子をシミュレートした。時間積分法は二次精度 Adams-Bashforth 法を採用した。また比較のため一次精度 FDS、三次精度 TVD MUSCL による計算結果も付記した。水の体積保存状態を比較するため次式を定義し、結果を図-4 に示した。

$$\text{相対誤差(\%)} = \frac{|\text{初期の体積} - \text{時刻}t\text{の体積}|}{\text{初期の体積}} \times 100 \quad (8)$$

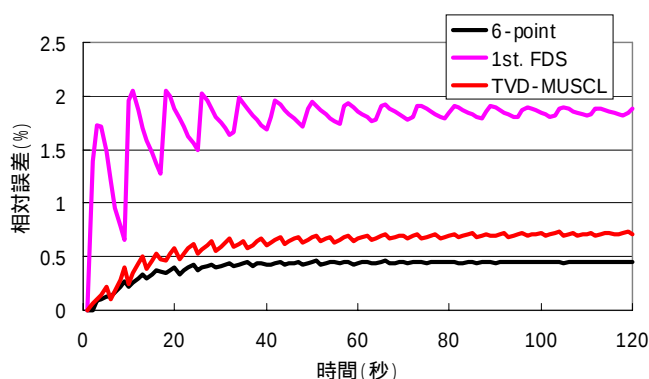


図-4 体積保存の時間変化

4. おわりに

保存形式 6-point scheme を内挿多項式として MUSCL 法と同様の手法で漸変流方程式に適用した。水深の再現能力では従来の TVD MUSCL 法が優れているが、体積保存の点では本研究で提案したスキームが優れている。今後はフラックス制限関数の改良を行う。

参考文献

- 1) Komatsu et.al : JHHE, Vol.3, No.2, 15-30, 1985
- 2) 朝位ら：水工学論文集，43，pp.497-502，1999

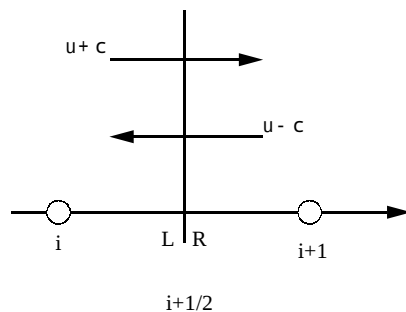


図-1 界面を通過する特性曲線

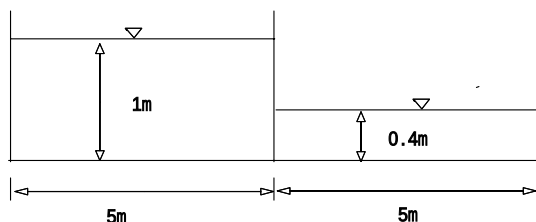
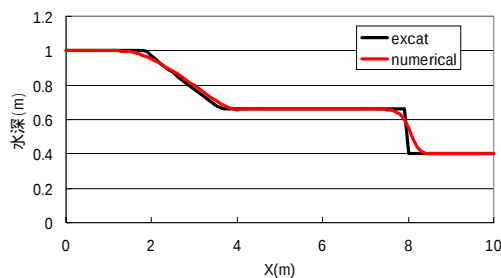
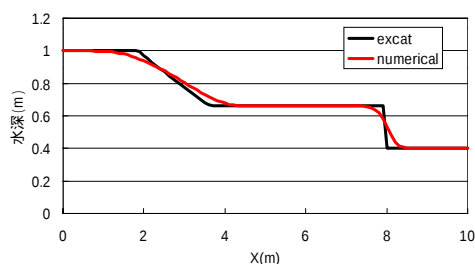


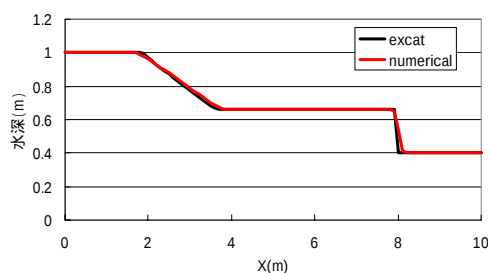
図-2 ダム破壊問題



(a) 保存形式 6-point scheme



(b) 一次精度 FDS scheme



(c) 三次精度 TVD MUSCL scheme

図-3 計算結果（1秒後）