数値分散性を利用した擬似 Variable Grid System の提案

東北大学大学院　学生員　鴫原良典
東北大学大学院　正会員　今村文彦

１．はじめに

波数分散性を考慮した津波などの長波数値計算を行う場合，ブシネスク方程式に代表される非線形分散波理論を差分法で解く方法が一般的である．しかし，この式を解くには陰解法が必要であり，計算が煩雑な上に計算容量や計算時間も大きい．これに対し，今村・後藤（1986）[1] は数値計算において差分化する際に発生する数値分散性，即ち打ち切り誤差を逆利用し，物理分散性に等しい条件で計算を行う方法を提案しているが，沿岸地域などの複雑な地形への適用が困難であるといった問題が残っている．そこで本研究では，擬似的に格子間隔を変化させた差分を行うことで波数分散性を正しく表現する新しい数値計算方法（擬似 Variable Grid System，以下擬似 VGS）を考案し，一次元線形長波理論へ適用し基礎検討を行った．

２．数値分散性と物理分散性

簡単のため水平上の線形長波理論による一次元伝播問題を考えると，打ち切り誤差を含んだ擬似微分方程式の第一次近似式は次のように表される．

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-c_0{}^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-\frac{c_0{}^2\Delta x^2}{12}\left(1-K^2\right)\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}=0 \qquad (1)$$

ここでη：水位，h：静水深，g：重力加速度，c_0：線形長波の波速$\sqrt{gh}$，Δx：空間格子間隔，Δt：時間格子間隔とし，K は Courant 数であり $K=c_0\Delta t/\Delta x$ で定義される．一方，物理分散効果を有する線形ブシネスク方程式は以下のようになる．

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-c_0{}^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-\frac{c_0{}^2h^2}{3}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}=0 \qquad (2)$$

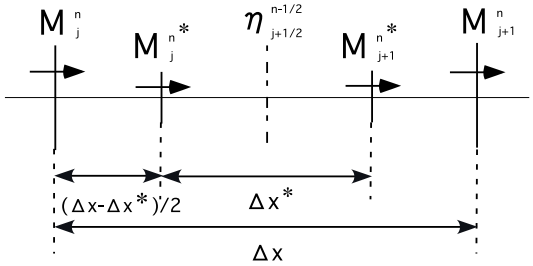
式（1）と（2）の比較から，式（1）の第 3 項は数値分散性を意味していることが判断できる．ここで数値分散性と物理分散性が一致する条件としては，式（1），（2）の分散項の係数を同じにすればよい．この比を，Δx について整理すると以下の式が導かれる．

$$\Delta x^*=\sqrt{gh\Delta t^2+4h^2} \qquad (3)$$

よって，空間格子間隔Δx^*を用いることにより，線形長波理論での差分計算で物理的な分散効果を得ることができる．しかし，実際の地形では格子点によって水深が異なるためΔx^*が変化してしまい，式（3）を適用した差分計算を行うことは困難である．

３．擬似 Variable Grid System

上記の問題を解決するため，本研究では従来の手法（グリッド，水深データや差分方法）を維持しながら行う数値計算法，擬似 VGS を考案した．以下一次元の leap-frog 差分を例に説明する．図－1 に定義した格子上で空間差分を行う際，擬似的な空間格子間隔Δx^*を仮定し，擬似格子上での流量を本来定義された格子上の値から補間することにより求める．



図－1　leap-frog 差分への擬似 VGS の適用

Keyword：擬似 VGS，数値分散性，leap-frog 差分，線形長波理論
〒982-0801　仙台市青葉区荒巻字青葉 06 東北大学附属災害制御研究センター　Tel 022-217-7515　Fax 022-217-7453

以上の様にして空間差分をとると，基本的な変数の位置を変えずに，擬似的に差分式の計算時のΔx^*を変化させる事が可能となる．よって連続の式を式（4）の様に書き換えることができる．

$$\eta_{j+1/2}^{n+1/2} = \eta_{j+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x^*}\left[M_{j+1}^{n\ *} - M_j^{n*}\right] \qquad (4)$$

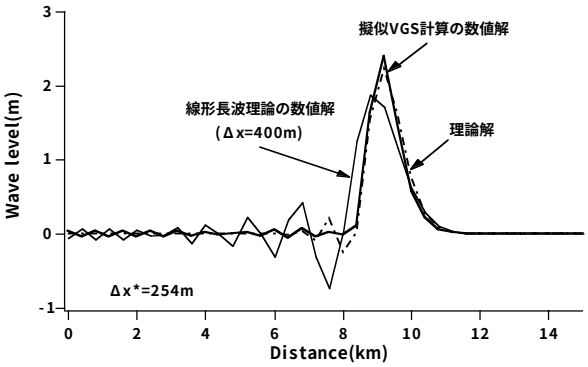
このように擬似変数を利用することで，物理分散性とみなせる条件で差分を行うことが可能となる．運動量の式に関しても同様に考えて，式（5）を得る．

$$M_j^{n+1} = M_j^n - gh_j \frac{\Delta t}{\Delta x^*}\left[\eta_{j+1/2}^{n+1/2*} - \eta_{j-1/2}^{n+1/2*}\right] \qquad (5)$$

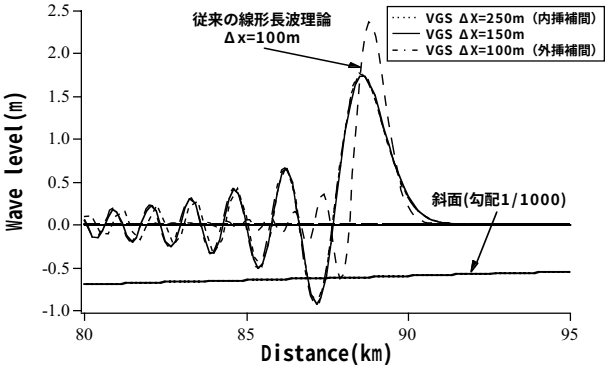
４．数値シミュレーション概要及び結果

水深 100m の水平床に波高 2.5m の孤立波を伝播させる数値実験に対して擬似 VGS を適用し，はじめに従来の線形長波理論による数値解と，フーリエ変換を利用して求めた微小振幅表面波の理論解との比較を行った．図－2 にΔt=5.0sec，Δx=400m とした 5 分後の空間波形を示す．波の概形と特に先端部での波高が理論解に一致しており，従来の線形長波理論による計算結果よりも分散性が抑えられ，精度が高い結果といえる．また，空間差分の補間に用いた関数は 3 次スプライン関数が妥当であることが分かった．多項式補間で計算を行うと，補間計算の際に数値誤差が発生し分散が大きくなってしまい理論解の結果と大きく異なってしまう．

次に水深が変化する場合を考えるため，勾配 1/1000 の斜面に水平床の場合と同様の孤立波を伝播させ，設定した空間格子間隔の違いによる擬似 VGS 計算結果への影響について検討した．図－3 にΔt=2.0sec とした初期変位 50 分後の空間波形を示す．設定した空間格子間隔の変化に依存せず，擬似 VGS 計算結果はほぼ同様な分散性を示している事が分かる．補間する変数は，設定した格子の大きさによって内挿補間と外挿補間に分けられる．図－3 より，補間による計算結果の差は第 3 波目までほとんど見られていないことが分かる．また，従来の線形長波理論（Δx=100m）の計算結果よりも分散性が大き



図－2　擬似 VGS 計算結果と理論解との比較



図－3　斜面床での擬似 VGS 計算結果

く現れており，水深の変動に関わらず擬似 VGS 計算は適用可能である．

５．おわりに

数値分散性を利用して物理分散性を表現する新しい差分計算方法として擬似 VGS を提案し，従来の線形長波理論による数値計算において，擬似 VGS によって物理的な分散性を精度良く表現できることが確認できた．この手法を使えば陽解法の差分計算により計算時間を短縮し，必要メモリも少なくして，物理分散性を考慮した理論解と同様な結果を得ることが期待できる．

参考文献

１）今村文彦，後藤智明：差分法による津波数値計算の打ち切り誤差，土木学会論文集，第 375 号／Ⅱ-6，pp.241-250，1986 年 11 月．

２）鴫原良典，今村文彦：打ち切り誤差を利用した新しい波数分散性の計算方法，土木学会東北支部／Ⅱ-52，pp.192-193，2002 年 3 月