２次オーダー量を考慮した非線形波浪場における回折波力の解析

京都大学工学部　　学生会員　井堀 恵司
京都大学大学院　　フェロー　渡邊 英一
京都大学大学院　　正員　　宇都宮 智昭

1. 研究目的

従来，浮体構造物の動揺解析においては，波理論として微小振幅波理論を用いている．これは設置海域の水深が比較的深く，かつ，静穏域に設置される場合においては妥当な仮定といえ，これまでの多数の実績ならびに実験的検証からも裏付けられている．一方，TLP における Springing 現象，あるいは浅水域に浮体構造物が設置されるため，波浪の非線形性の影響が顕著になる場合等，２次オーダー波力が無視できない場合も多い．そこで本研究では，任意形状を有する浮体構造物の２次オーダー回折波力の解析プログラムの開発をおこなった．プログラムの検証のため，従来より多数の計算例がある着底円筒に作用する２次回折波力を計算し，既存解との比較検証を行う．

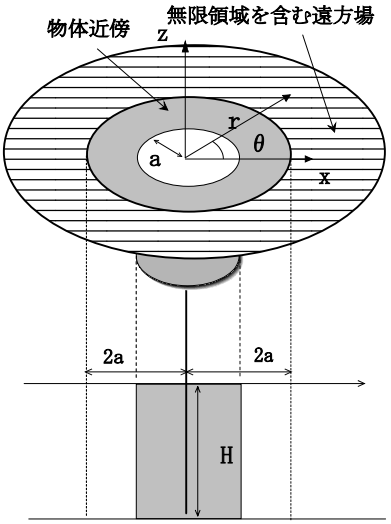

Fig.1　検証モデル

2. 解析手法

構造物に作用する強制波力を解析する方法としては，数々の手法が存在するが，本研究においては線形積分方程式に基づいた境界要素法を用いて、まず１次オーダー量の速度ポテンシャルを求める．次に，求められた１次オーダー量の入射波ポテンシャル及び回折波ポテンシャルの一階微分値や二階微分値を物体表面及び自由表面上で積分することで，２次オーダー量の強制波力を得ることができる．

まず、２次オーダー量の問題について定式化を行う。微小振幅波を仮定して、流体の全速度ポテンシャルΦが微小パラメーター $\varepsilon = \kappa A$（$\kappa = 2\pi/\lambda$ ：波数、A：波振幅)によって次のように展開されるとする．

$$\Phi = \varepsilon(\Phi_I^{(1)} + \Phi_D^{(1)}) + \varepsilon^2(\Phi_I^{(2)} + \Phi_D^{(2)}) + O(\varepsilon^3) \qquad (1)$$

$\Phi_I^{(1)}$：1 次オーダーの入射波ポテンシャル，　$\Phi_D^{(1)}$：1 次オーダーの回折波ポテンシャル

$\Phi_I^{(2)}$：2 次オーダーの入射波ポテンシャル，　$\Phi_D^{(2)}$：2 次オーダーの回折波ポテンシャル，

$O(\varepsilon^3)$：3 次オーダー量以上の項

次にベルヌーイ式を、z=0 に関してテーラー展開した後、上式と自由表面上の条件を代入し、ε によって正則摂動展開をすることで２次オーダー量に関しての基礎式といえる次式が得られる．

自由表面上において　，１次オーダー量に関して,2 次オーダー量に関して

$$\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \qquad (2) \qquad \frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z} = \frac{1}{g}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi^{(1)})^2 \qquad (3)$$

次に k(k=1～6)方向の運動モードに対する強制波力は、入射波の周波数をω，物体表面の外向き法線ベクトルを n_k，流体密度をρとすると，

$$F_k(t) = \mathrm{Re}[F_k^{(0)} + F_k^{(1)}e^{i\omega t} + (F_k^{(2,2)} + F_k^{(2,2)})e^{2i\omega t} + O(\varepsilon^3)] \qquad (4)$$

$$F_k^{(1)} = -\rho\, i\omega\iint_{S_B}(\phi_I^{(1)} + \phi_D^{(1)})n_k\, dS \qquad F_k^{(2,0)} = -\frac{\rho}{4}\iint_{S_B}|\phi_I^{(1)} + \phi_D^{(1)}|^2\, n_k\, dS - \frac{\rho K}{4}\int_{C_c}|\phi_I^{(1)} + \phi_D^{(1)}|^2\, n_k\, dl$$

$$F_k^{(2,2)} = -2\rho\, i\omega\iint_{S_B}(\phi_I^{(2)} + \phi_D^{(2)})n_k\, dS \qquad O(\varepsilon^3)\text{: ３次オーダー以上の項}$$

と表示できる．また，S_B ：物体表面，C_c ：S_B と自由表面との交線である．

本研究で主に論じるのは $F_k^{(2,2)} = -2\rho\, i\omega\iint_{S_B}(\phi_I^{(2)} + \phi_D^{(2)})n_k\, dS$ である．

キーワード　２次オーダー量，回折波力，境界要素法，円筒浮体
連絡先　　〒606-8304　京都府京都市左京区吉田本町　Tel 075-753-5079

ここで$F_k^{(2,2)}$のうち，２次オーダー量の回折波力$F_{kD}^{(2,2)} = -2\rho\, i\,\omega\iint_{S_B} \phi_D^{(2)} n_k\, dS$について考える．

$F_{kD}^{(2,2)}$はk方向の周波数2ωの*radiation*問題のポテンシャル$\Psi_k^{(2)}$を用いることで

$$F_{kD}^{(2,2)} = -2\rho\, i\,\omega[\iint_{S_B} \frac{\partial \Phi_I^{(1)}}{\partial n}\Psi_k^{(2)} dS + I_{Fk}^{(2)}] \qquad (5)$$

$$I_{Fk}^{(2)} = \iint_{S_F} [\frac{i\,\omega}{2g}\{\Phi_I^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}(g\frac{\partial \Phi_D^{(1)}}{\partial z} - \omega^2\Phi_D^{(1)}) + \Phi_D^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}(g\frac{\partial \Phi_I^{(1)}}{\partial z} - \omega^2\Phi_I^{(1)})$$

$$+ \Phi_D^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}(g\frac{\partial \Phi_D^{(1)}}{\partial z} - \omega^2\Phi_D^{(1)})\} - 2i\,\omega\nabla\Phi_I^{(1)}\nabla\Phi_D^{(1)} - i\,\omega|\nabla\Phi_D^{(1)}|^2]\Psi_k^{(2)} dS \qquad (6)$$

となる．

この定式化を基に解析を行う上で，数値計算上困難な点が２点ある．一つは，高次境界要素法を用いることで回折波ポテンシャルの一階微分値は比較的容易に求められるが，二階微分値を高精度に求めるのは困難であるという点である．これは divergence theorem を用いて，Kim(1991)[1]と同様な方法により計算を行った．もう一点は，無限遠に至る自由表面上での積分の収束性が極めて悪い，という点であるが，Fig.1 のように物体近傍と遠方場の２つの領域に分割し，遠方場はポテンシャルを級数展開し解析的に計算を行うことで解決される[2]．

3. プログラムの検証及び解析結果

検証モデルとしては，Kim(1991)[1]の解析結果と比較検証を行うため，同じモデルである半径 a=1.0，水深 H=1.0 の着底式の円筒浮体を用いる．その検証モデルを Fig.1 に示す．重力加速度を g，円筒浮体の半径を a，入射波の周波数を ω，振幅を A とし，x 軸正方向から波が入射する場合を想定する．無限領域を含む遠方場に関しては r－θ 極座標系において，r=2a から無限遠までの積分において Fourier-Kochin 級数展開をして，解析的に積分計算を行っている．その無限級数の収束性に関する検討を行ったものを Table 1 に示す．なお，３つのモード n, j, l は，Kim(1991)[1]に準じている． n, j, l の３つのモード数が 8 より大きい場合において，収束していると考えられる．

Table1 外部領域の級数計算の収束性

	n,j,l =2	n,j,l =4	n,j,l =8	n,j,l =16
ω^2a/g=0.4	1.1120	1.1535	1.1521	1.1521
ω^2a/g=1.0	1.2481	1.1608	1.1611	1.1611
ω^2a/g=1.6	1.1592	0.8279	0.8266	0.8266

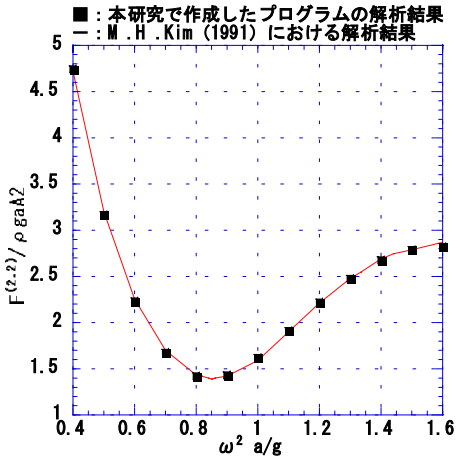

Fig.2 本研究で作成したプログラムと M .H .Kim の論文との比較検証

横軸に周波数に関しての無次元量ω^2a/g，縦軸に本研究で作成したプログラムの解析結果と Kim（1991）[1]における解析結果の ρ gaA^2 で除した２次オーダー量の surge 方向の $F_k^{(2,2)}$（無次元量）を表したのが Fig.2 である．Fig.2 をより分かるとおり，本研究で作成したプログラムの解析結果と Kim(1991)の解析結果は良く一致している．従って，本研究で作成したプログラムの妥当性が検証されたものと思われる．

4. まとめ

２次オーダー量に関する定式化を行い，それを元に２次オーダー量の強制波力を求めるプログラムを作成し，Kim(1991)の論文の解析結果との比較検証を行った．検証の結果，本プログラムによる結果と Kim(1991)の結果は一致しており，本研究で作成したプログラムの妥当性が検証されたと思われる．本研究は円筒形状の着底構造物に対しての検証のみを示したが，さらに任意形状物体についての解析・検証を行う必要性がある．

（参考文献）

1) M.H. Kim, “The complete second-order diffraction solution for an axisymmetric body,” *Applied Ocean Research*, 13, 287-296 (1991).

2) M.H. Kim & D.K.P. Yue, “Second-order sum-frequency wave loads on large-volume structures,” *J. Fluid Mech.*, 200, 235-264 (1989).