

成層弾性波動場の Green 関数の固有関数展開表現に関わる考察

東京理科大学 理工学部 正会員 東平光生¹

1. はじめに

著者はこれまで成層波動場の Green 関数のスペクトル分解とその応用について考察してきた¹⁾²⁾。この研究の目的は、Green 関数を構成するところの留数項と分岐線積分項の数学的な共通の枠組みについて考察することである。この中で、成層弾性波動場に関しては horizontal wavefunction の複素波数平面の原点の特異性は強く、先の論文²⁾ではこの特異性の処理について十分な議論がなされたとは言い難かった。本研究では horizontal wavefunction の複素波数平面の原点での特異性の処理の問題を、ソース点と観測点を分離した形式の Green 関数を誘導することで見通し良く理解する方法を示す。

2. ソース点と観測点の座標を分離した形式での Green 関数

まず、ソース点と観測点を分離した形式で成層弾性波動場の Green 関数を誘導しておこう。このために Green 関数を次式で定義する。

$$[(\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot + \mu\nabla^2 + \rho\omega^2] \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\mathbf{1} \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{r} \delta(\theta - \theta') \delta(z - z') \quad (1)$$

ここに、 ρ は質量密度、 λ および μ は Lamé の定数で成層波動場では層ごとに一定の正の有界な関数とする。また ω は角振動数、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数、 $\mathbf{G}$ は Green 関数、 $\mathbf{r}$ および $\mathbf{r}'$ は観測点およびソース点で、

$$\mathbf{r} = (r, \theta, z), \quad \mathbf{r}' = (r', \theta', z')$$

と表され、 $\mathbf{1}$ は単位テンソルである。式 (1) の波数積分表示は次のようになる。

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k \mathbf{H}_k^m(r, \theta) \mathbf{g}_k(z, z') \mathbf{H}_k^m(r', -\theta') dk \quad (2)$$

ただし、 $\mathbf{g}_k(z, z')$ は波数領域の Green 関数で次式で定義される。

$$\mathbf{A}_k \mathbf{g}(z, z') = -\mathbf{1} \delta(z - z') \quad (3)$$

ここに、

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_z^2 - k^2\mu + \rho\omega^2 & -(\lambda + \mu)k\partial_z & 0 \\ (\lambda + \mu)k\partial_z & \mu\partial_z^2 - k^2(\lambda + 2\mu) + \rho\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\partial_z^2 - k^2\mu + \rho\omega^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

また、 $\mathbf{H}_k^m$ は horizontal wavefunction ので次の成分を持つ。

$$\mathbf{H}_k^m(r, \theta) = \begin{bmatrix} Y_k^m(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) & \frac{1}{kr} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) \\ 0 & \frac{1}{kr} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) & -\frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここに、 $Y_k^m(r, \theta) = J_m(kr) \exp(im\theta)$ で J_m は m 次の第 1 種 Bessel 関数である。

式 (2) の波数積分の経路を変形し、分岐線積分核の固有関数への分解に関する定理²⁾を適用することで Green 関数の固有関数展開表現が次のように得られる。ここでの手法は前論文²⁾に詳述されているので詳細は省略する。ただし、 $r > r'$ とする。

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k_n \in \sigma_{pn}} \langle \mathbf{V}_{k_n}^{m(2)}(\mathbf{r}) | \mathbf{E}(k_n) | \mathbf{V}_{k_n}^m(\mathbf{r}')^* \rangle + \sum_{k_j \in \sigma_{pl}} \langle \mathbf{V}_{k_j}^{m(2)}(\mathbf{r}) | \mathbf{E}(k_j^*) | \mathbf{V}_{k_j}^m(\mathbf{r}')^* \rangle \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k_j \in \sigma_{pl}} \langle \mathbf{V}_{k_j}^{m(1)}(\mathbf{r}) | \mathbf{E}(k_j^*) | \mathbf{V}_{k_j}^m(\mathbf{r}')^* \rangle + \int_{\sigma_{c+}} \langle \mathbf{V}_k^{m(2)}(\mathbf{r}) | \mathbf{E}(k) | \mathbf{V}_k^m(\mathbf{r}')^* \rangle |dk| + \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \quad (6) \end{aligned}$$

¹ 〒278-8510 野田市山崎 2641, phone 04-7124-1501, fax 04-7123-9766

キーワード: 成層弾性波動場, Green 関数, 固有関数展開表現

ここに、 σ_{pn} は正規モードの正の波数の集合、 σ_{pl} は複素 Rayleigh 波モードの波数で複素波数平面の第 4 象限にあるものの集合、 σ_{c+} は分岐線の波数の集合で正の実軸と負の虚軸のものを示す。また、 $\mathbf{E}(k)$ は波数 k での固有関数に対するエネルギー積分を表す。そして、

$$\langle \mathbf{V}_k^{m(2)}(\mathbf{r}) | \mathbf{E}(k) | \mathbf{V}_k^m(\mathbf{r}') \rangle = k \mathbf{H}_k^{m(2)}(r, \theta) \mathbf{\Psi}_k(z) \mathbf{E}(k)^{-1} [\mathbf{H}_k^m(r', -\theta') \mathbf{\Psi}_k(z)]^T \quad (7)$$

であり、 $\mathbf{\Psi}_k$ を固有関数として k の値に応じて、正規モードや連続スペクトルの固有関数を対応させる。また、 k^* は波数 k に対する共役複素数を示す。さらに、 $\mathbf{H}_k^{m(\tau)}$ は $Y_k^{m(\tau)}(r, \theta) = H_m^{(\tau)}(kr) \exp(im\theta)$ で構成する horizontal wavefunction である。ただし、 $H_m^{(\tau)}$ は m 次の Hankel 関数である。また、

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{C_1+C_2} k \mathbf{H}_k^{m(2)}(r, \theta) \mathbf{g}_k(z, z') \mathbf{H}_k^m(r', -\theta') dk \quad (8)$$

で、horizontal wavefunction の複素波数平面の原点での特異性の Green 関数への寄与²⁾である。ここに、 C_1 は複素波数平面の第 3 象限での原点時計周り微小な半径の $1/4$ 円周、 C_2 は複素波数平面の第 4 象限での原点反時計周り微小な半径の $1/4$ 円周である²⁾。

3. Horizontal wavefunction の特異性の検討

ここでは horizontal wavefunction の複素波数平面原点の特異性の Green 関数への寄与の問題を少し詳しく検討する。まず、 $m \geq 1$ のとすれば

$$\mathbf{H}_k^{m(2)}(r, \theta) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} \frac{2^m(m-1)!}{\pi} i e^{im\theta} (kr)^{-m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m(kr)^{-1} & im(kr)^{-1} \\ 0 & im(kr)^{-1} & m(kr)^{-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{H}_k^m(r, -\theta) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} \frac{(kr)^m}{2^m m!} e^{-im\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (2kr)^{-1} & -im(2kr)^{-1} \\ 0 & -im(2kr)^{-1} & -(2kr)^{-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

より、式 (8) は $1/k$ 特異性の積分を扱っていることは明らかである。ところが、波数領域の Green 関数の性質まで踏み込んで考察すると、式 (4) の演算子 $\mathbf{A}_k$ が $k \rightarrow 0$ のときに $\mathbf{A}_k \rightarrow \text{diag}[(\lambda + 2\mu)\partial_z^2 + \rho\omega^2, \mu\partial_z^2 + \rho\omega^2, \mu\partial_z^2 + \rho\omega^2]$ となることを用い、これに対応する波数領域の Green 関数を $\mathbf{g}_k(z, z') \rightarrow \text{diag}[\alpha(z, z'), \beta(z, z'), \beta(z, z')]$ として、式 (9) と (10) によって式 (8) の被積分関数の主要部を計算すると、実は $1/k$ 特異性は打ち消し合うことになり、horizontal wavefunction の特異性は Green 関数には寄与しない。以上の議論をつぎのように定理としてまとめることができる。

Theorem 1 Horizontal wavefunction の $k = 0$ での特異性による Green 関数への寄与はゼロである。すなわち、

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{C_1+C_2} k \mathbf{H}_k^{m(2)}(r, \theta) \mathbf{g}_k(z, z') \mathbf{H}_k^m(r', -\theta') dk = 0$$

この定理によって、Green 関数はごく自然な形として、離散的な固有値 (複素 Rayleigh 波も含む) の固有関数の和と連続スペクトルの固有関数による積分で表現されることになった。この自然な形は波数領域の Green 関数や horizontal wavefunction に踏み込んで考察することで得られることになった。なお、ここでの結果を受けて連続スペクトルの積分そのものにも horizontal wavefunction の特異性は影響しないことになる。そしてこの結果も自然なものと言えよう。

4. おわりに

ソース点と観測点を分離した形式の成層弾性波動場の Green 関数を誘導し、そこから horizontal wavefunction の特異性の Green 関数への寄与を論じた。この形式の Green 関数によって、見通しの良い議論は複素 Rayleigh 波モードの非伝播性の性質についても可能となる。また、境界積分方程式で必要となる表面力の Green 関数についても、この形式から誘導する方が望ましい場合もあるようである。こうした問題については発表当日に言及したい。

参考文献

- 1) Touhei, T. (2000): A scattering problem by means of the spectral representation of Green's function for acoustic layered half space, *Computational Mechanics*, **25**, pp. 477-488.
- 2) Touhei, T. (2002): Complete eigenfunction expansion form of the Green's function for elastic layered half space, *Archive of Applied Mechanics*, **72**, pp. 13-38.