

## Spectral 確率有限要素法による三次元波動伝播解析

京都大学工学部 学生会員 村上裕宣  
 京都大学防災研究所 正会員 本田利器

## 1. はじめに

効率的な耐震設計を行うためには地震動の正確な予測が重要であるが、地震動に影響を及ぼす要素が多くの不確定性を含んでいるため、これには様々な困難がある。また、地盤は複雑なランダム場であるため、その影響を考慮することも重要である。したがって、諸条件の不確定性を定量的に考慮した検討は重要であるといえる。

本研究では、不確定性を定量的に考慮した解析を効率的に行うための有効な手段としてスペクトル確率有限要素法<sup>1)</sup>(SSFEM)を考える。本田<sup>2)</sup>は同手法を二次元波動場へ適用した。本研究では、同手法の三次元波動場への適用を提案する。ここでは、定式化の提示、及びモンテカルロシミュレーションとの比較により適用性の検証を行う。

## 2. スペクトル確率有限要素法 (SSFEM)

詳細は、参考文献<sup>1)</sup>に譲る。本論文では、剛性が不確定性を有する問題に対してSSFEMを適用する。

まず、剛性  $G(x, \theta)$  をガウス確率過程とし、これを Karhunen-Loève 展開 (KL 展開) する。

$$G(x, \theta) = \bar{G}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\theta) \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $x, \theta$  はそれぞれ位置、確率空間において対応する事象を表す。 $\bar{G}(x)$  は  $G(x, \theta)$  の期待値、 $\xi_i(\theta)$  は正規直交性を有する独立ガウス確率変数であり、 $\lambda_i$  及び  $f_i(x)$  は剛性の相関関数によって決まる基底関数である。

一方、得られる変位  $u(\theta)$  はガウス過程とは限らない。そこで、これを Polynomial Chaos 展開 (PC 展開) する。

$$u(\theta) = a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 $\Gamma_p(\cdot)$  はガウス確率変数を引数とする  $p$  次の汎関数であり、この汎関数の張る空間が  $p$  次の Homogeneous Chaos (HC) となる。

解析においては、KL 展開、PC 展開ともに展開次数を有限とする。KL 展開については、式 (1) において  $i$  の展開次数を有限とする。PC 展開については、式 (2) において HC の展開次数を有限とする。以下では、KL 展開及び HC の展開次数を  $KL=2, HC=2$  のように表す。これらを用いることで、不確定性を有する波動場を表す運動方程式を展開することができる。この展開された式を解くことで、近似的に変位  $u(\theta)$  を求める。

## 3. 解析例

## (1) 解析条件

ここでは、SSFEM による解析の妥当性を検証するため、モンテカルロシミュレーション (MCS) との比較を行う。解析の対象としては、要素分割を  $7 \times 7 \times 7$  とする  $1.0 \times 1.0 \times 1.0$  の領域を考える。この領域の範囲は  $(x, y, z) \in [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$  とする。また、単位体積重量は 1.0、ポアソン比は 0.25、せん断波速度は毎秒 0.1 とする。この領域において不確定性を有するパラメータはせん断剛性  $G$  のみとする。剛性  $G$  の自己相関関数は次式で与えられるとする。

$$C(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (\gamma \bar{G})^3 \exp \left\{ -\frac{(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)}{b} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

ここで、 $b$  は相関距離に相当するパラメータであり、ここでは  $b=1.0$  とした。 $\gamma$  はばらつきの大きさを決めるパラメータであり、ここでは期待値の 10% となるよう  $\gamma=0.1$  とした。波源として、時刻  $t=0.0$  [sec] に、領域の中央にインパルス的な体積膨張を与える。この入力による節点変位及び変位の確率的性質を比較する。観測点 OP を点  $(x, y, z) = (-0.36, -0.36, -0.36)$ 、観測面 OS を平面  $z = -0.36$  とする。

解析手法としては以下に述べる方法を用いた。MCS については、試行回数を 5000 回とした。試行を 5000 回行うことで、対象とする問題の確率的性質は十分表現できている。SSFEM については、展開次数による影響を比較するため、 $KL=4$  としたものと  $KL=2$  としたものを用いた。ただし、HC は両ケースとも  $HC=2$  とした。また、比較のため、剛

性が一様に  $\bar{G}$  である場を対象とした確定的な FEM 解析も行った。

## (2) 解析結果

観測点 OP における  $x$  方向の変位の時刻歴を図-1 に示す。同図では、MCS と SSFEM により得られた変位の期待値及び FEM 解析で得られた値がプロットされている。FEM による結果は MCS による結果と異なっているが、これは不確定な場と剛性を一様とした場における波動伝播は異なることを示している。また、SSFEM による結果は MCS による結果と良く一致しており、SSFEM は場の不確定性を考慮できているといえる。

観測面 OS における、時刻  $t=4.0$ [sec] での MCS 及び SSFEM による変位の  $z$  成分の分散を図-2 に示す。SSFEM による分散値は MCS による値を概ね再現できており、また SSFEM において KL が大きい方が MCS の結果をよく近似できている。

観測点 OP における、時刻  $t=4.0$ [sec] での MCS と SSFEM による  $x$  方向の変位の期待値の確率密度分布を図-3 に示す。SSFEM による確率密度分布は MCS による分布をよく再現できている。

今回の解析は CPU が PentiumIII(クロック数 850MHz) の計算機を用いて行った。解析に要した計算時間は、MCS では 110 時間であったのに対して、KL=4 とした SSFEM では 55 分、KL=2 とした場合には 27 分であった。これは、SSFEM を用いることにより、不確定性を有する三次元波動場の解析を効率的に行えたことを意味する。

## (3) 相関距離による影響の検討

剛性の相関関数の違いによる波動場への影響について検討した。対象は前述の領域とし、より詳細に検討するために要素分割を  $50 \times 50 \times 50$ 、せん断波速度を毎秒 1.0 とした。ここでは、式 (3) における相関距離  $b$  の違いによる影響について検討するため、相関距離  $b$  を 1.0 とした場合と 0.4 とした場合について、KL=2、HC=2 とした SSFEM を用いて解析を行った。波源として、領域の中央に、中心周波数が 2Hz のリッカー波を爆破型の震源に相当する形で与えた。

平面  $z=0.1$  における、時刻  $t=0.5$ [sec] での変位の  $z$  成分の分散を図-4 に示す。両者の分散の分布は似た形状となっているが、その値は異なったものとなっている。この結果は、相関距離の違いが波動の分散の大きさに影響を与えることを示している。

## 4. 結論

本研究では、不確定性を有する三次元波動場における波動伝播解析を効率的に行うために、スペクトル確率有限要素法 (SSFEM) の適用を提案した。本手法による解析結果とモンテカルロシミュレーションによる解析結果はよく一致しており、また計算時間も大幅に短縮された。これらの結果から、SSFEM は不確定性を有する三次元場における波動伝播を効率的に解析できる手法であるといえる。また、ランダム媒質の相関距離の違いにより変位の分散値が異なることを示した。

### 参考文献

- 1) Ghanem, R. G. and Spanos, P. D. : Stochastic Finite Elements - A Spectral Approach, Springer - Verlag NY, 1991.
- 2) 本田利器 : スペクトル確率有限要素法によるランダム場の波動伝播解析, 土木学会論文集, No.689/I-57, pp.321-331, 2001. 10.

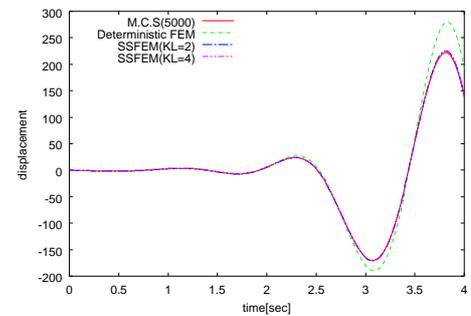


図-1 観測点 OP における  $x$  方向の変位の時刻歴

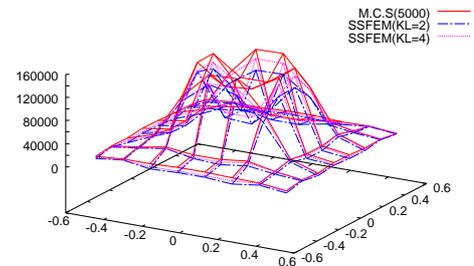


図-2 観測面 OS における変位の  $z$  成分の分散 ( $t=4.0$ [sec])

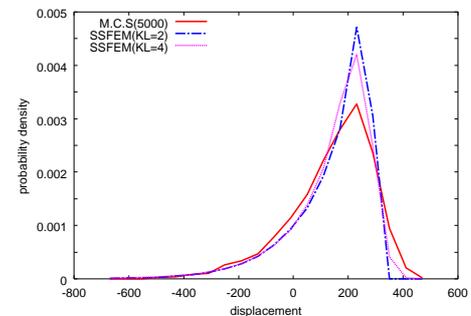


図-3 観測点 OP における  $x$  方向の変位の期待値の確率密度分布 ( $t=4.0$ [sec])

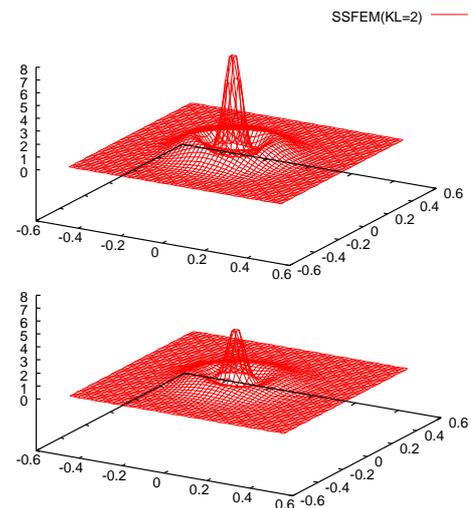


図-4 平面  $z=0.1$  における変位の  $z$  成分の分散 ( $t=0.5$ [sec], 上:  $b=1.0$ , 下:  $b=0.4$ )