ARモデルによる土木構造物の高精度振動特性推定法

長崎大学大学院　学生会員　○中宮義貴
長崎大学工学部　フェロー　岡林隆敏
長崎大学工学部　正会員　奥松俊博

1.はじめに

橋梁が老朽化すると，部材の欠落，様々な隙間，亀裂の発生，錆による部材の欠損等により，構造物の剛性低下による振動数の低下や減衰定数の増加が考えられる．極めて微細な振動数を検出するシステムを開発することにより，振動数の変化による構造物の老朽化の判定が可能になると考えられる．本研究は橋梁の常時微動から橋梁の微細な振動特性を高精度に推定する,高精度構造同定アルゴリズムを開発することにある．

2.橋梁常時微動の表現

図-1 に示すランガー橋モデルの各節点に互いに独立な白色雑音 $\mathbf{n}(t)$ を作用させる．有限要素法でモデル化された各節点の応答は，基本座標と振動モードを用いて，$\mathbf{y}(t)=\Phi\mathbf{q}(t)$ と表される．基準座標を状態空間表示すると，運動方程式は次式で与えられる．

$$\mathbf{x}(t)=\lfloor \mathbf{q}^T(t) \quad \dot{\mathbf{q}}^T(t)\rfloor,\ \dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{n}(t) \qquad (1)$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ -[h_i\omega_i] & [\omega_i^2]\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{\Phi}^T\end{bmatrix},\ \mathbf{n}(t)=[n_1(t) \ \cdots \ \cdots \ n_k(t)]^T$$

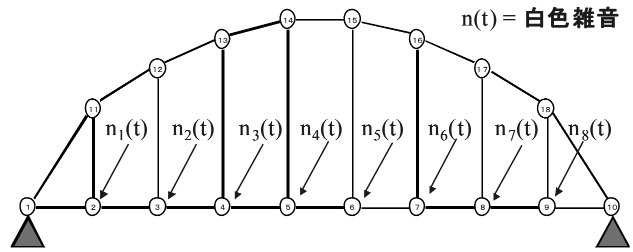

図-1　ランガー橋モデル

解析対象は，表-1 の諸元に示したランガー橋である．有限要素法によるモデル化によりのモード解析により算出した固有振動数を 1 次振動から 12 次振動まで示したものが表-2 である．8 節点にそれぞれ白色雑音を加えて，モード解析法により，振動次数を 12 次まで考慮した場合の常時微動応答モデルを算出する．節点②を着目点とした際の，応答波形を図-2 に示す．また AR(自己回帰)モデルで用いる応答波形の自己相関を図-3 に示す．

表-1 モデルの諸元

形式	補剛桁橋
支間(m)	58.00
ライズ(m)	9.36
補剛桁の断面積(m²)	2.24×10⁻²
拱助の断面積(m²)	2.24×10⁻²
曲げ剛性(ton・m)	1.74×10³
桁全重量(ton)	149.74
格間数	9

表-2　固有振動数

	振動数(Hz)
1次	1.742
2次	2.558
3次	4.018
4次	6.354
5次	9.734
6次	11.390
7次	13.616
8次	17.607
9次	20.763
10次	22.401
11次	32.731
12次	42.065

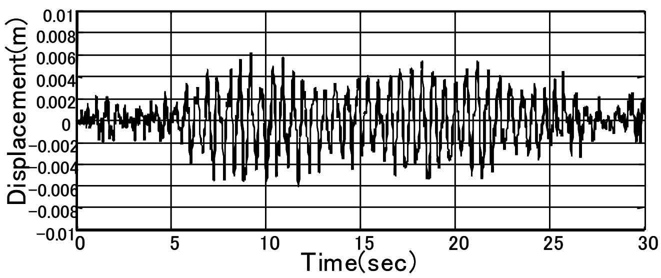

図-2　常時微動モデル波形

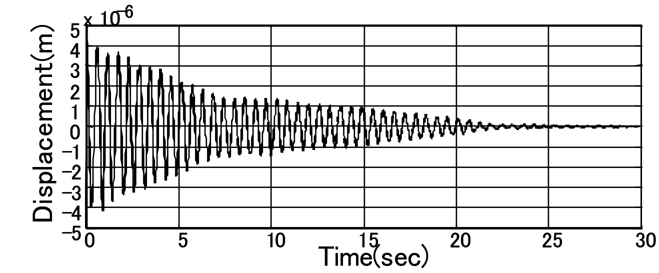

図-3　自己相関波形

3.構造同定手法

運動方程式を離散表示すると，次式となる．

$$\mathbf{x}(k+1)=\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k)+\overline{\mathbf{B}}\mathbf{n}(k),\quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0 \qquad (3)$$

$$\mathbf{y}(k)=\overline{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k)$$

この式に, 可観測行列 $\mathbf{L}$ [1]を用いて変換すると, ARMA モデルで表示することができる．

$$\mathbf{L}=[\overline{\mathbf{C}}^T \quad (\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}})^T \quad \cdots \quad \cdots \quad (\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{n-1})^T]^T \qquad (4)$$

$$y(k)+\sum_{i=1}^{n}a_i y(k-i)=e(t)+\sum_{j=1}^{n-1}b_j(k-j) \qquad (5)$$

これを，AR モデルで近似する．

$$y(k)+\sum_{s=1}^{n}a_s y(k-s)=e(t) \qquad (6)$$

キーワード　振動特性，常時微動，AR モデル，パラメータ，MEM
連絡先　〒852-8521　長崎市文教町 1-14　長崎大学　工学部　ＴＥＬ095-847-1111(内線 2711)　FAX095-848-3624

ARモデルの特性方程式は

$$z^n - \alpha_1 z^{n-1} - \alpha_2 z^{n-2} - \cdots\cdots - \alpha_n = 0 \tag{7}$$

となり，この方程式の根は，次式で与えられる．

$$Z_k = X_{\mathrm{Re}}^k \pm i X_{\mathrm{Im}}^k \tag{8}$$

この根と振動パラメータの関係は

$$h_k\omega_k = (-1/\Delta) ln\sqrt{X_{\mathrm{Re}}^2 + X_{\mathrm{Im}}^2}\ ,\quad \omega_k\sqrt{1-h_k^2} = (1/\Delta)\tan^{-1}(X_{\mathrm{Im}}/X_{\mathrm{Re}}) \tag{9}$$

となり,振動数ω_kと減衰定数h_kが推定できる．ここに,Δは測定データのサンプリング時間である．

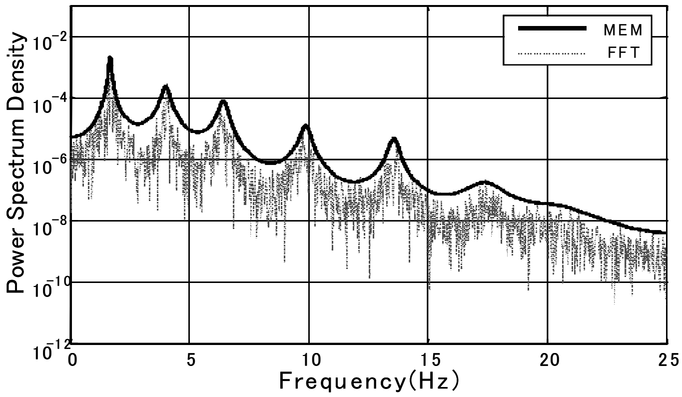

図-4　MEMとFFTパワースペクトル密度

4.ARモデルによる橋梁自動動特性推定

ARモデルより動特性を抽出するには，はじめにモデル次数nを決定する必要がある．ARモデルに基づくMEM（最大エントロピー法）によるパワースペクトル密度と，応答波形のFFTとの比較により，最適な次数を決める．次数$n=30$のMEMとFFTによるパワースペクトル密度の対数表示を図-4に示す．次にARモデルの特性方程式の根を複素平面上で示したもの（回数$m=30$）が図-5である．ここで根の絶対値r_cと角度θ_cは，(9)式よりパラメータΔ, h_c, ω_cを用いて次式で表せる．

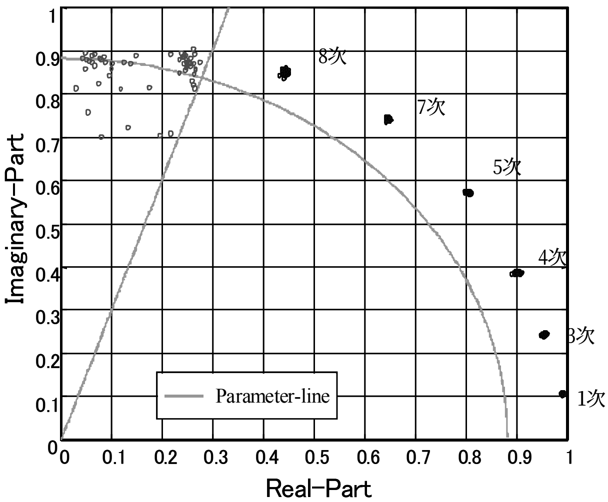

図-5 特性根の分布

$$r_c = e^{-h_c\omega_c\Delta},\quad \theta_c = \sqrt{1-h_c^2}\,\omega_c\Delta \tag{10}$$

パラメータ($\Delta=0.01$, $h_c=0.1$, $\omega_c=20$)を与え，r_c，θ_cの範囲にて根を抽出することにより振動数を算出する．振動数軌跡(m=100)を図-6に，精度照査としてGauss分布を図-7に，平均値，標準偏差，変動係数の数値表を表-3に示す．これより，8次までの振動数が常に推定できたことがわかる．高次になるほど変動は大きくなっているが，変動係数でみると，各次数とも1%程度の精度での推定が可能であるといえる．

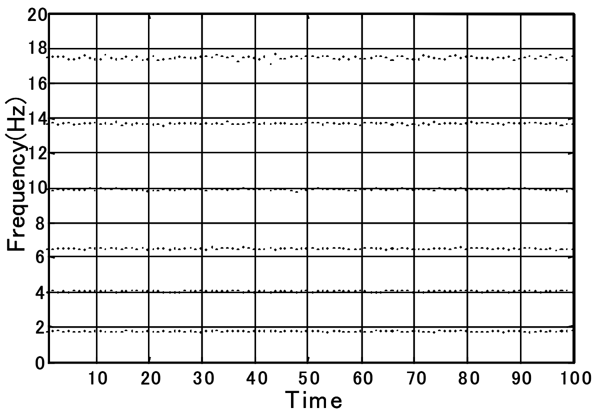

図-6 推定振動数軌跡

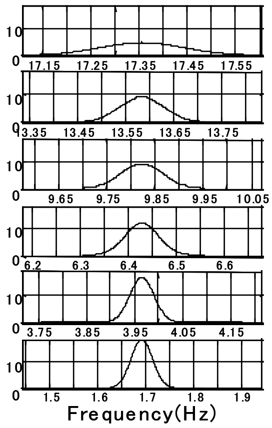

図-7 Gauss分布

表-3　推定値の精度

	1次	2次	3次	4次	5次	6次	7次	8次
理論値(Hz)	1.742	2.558	4.018	6.355	9.734	11.390	13.616	17.607
推定値(Hz)	**1.694**	ー	**3.967**	**6.431**	**9.824**	ー	**13.556**	**17.357**
標準偏差(Hz)	**0.0226**	ー	**0.0251**	**0.0349**	**0.0450**	ー	**0.0442**	**0.0875**
変動係数(%)	**1.33**	ー	**0.63**	**0.54**	**0.46**	ー	**0.33**	**0.50**

5.まとめ

本研究が提案する常時微動からの振動数推定の確立において，最も重要となるのは，モデル次数とパラメータの決定である．対象橋梁により，それぞれ決定する必要がある．決まれば計測器をおくだけでのリアルタイムでの振動数自動推定が可能である．今後は，本手法と遠隔無人計測システムとの結合を計ると共に，様々な橋梁にて本手法を活用し，有効性を高めたいと考えている．

参考文献　1)中溝高義：信号解析とシステム同定，コロナ社,1988.3